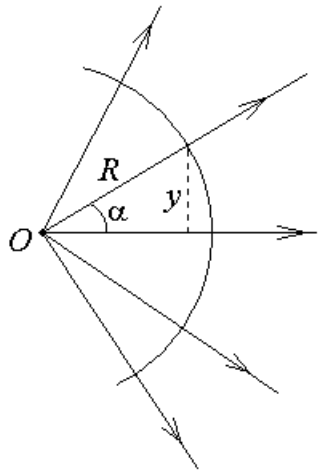
Экзамен. Гомоцентрический пучок лучей. Приведенный радиус кривизны. Правило ABCD.

Гомоцентрический пучок лучей — это пучок, образованный лучами, выходящими из одной точки на оптической оси, или лучами, идущими в одну точку на оптической оси.

В изотропной среде лучи перпендикулярны поверхности равных фаз. Гомоцентрическому пучку лучей соответствует сферический фронт волны.

По определению $\frac{R}{n}$ — приведенный радиус гомоцентрического пучка лучей, где R — радиус соответствующего сферического фронта волны, n — показатель преломления среды.



Для любой точки гомоцентрического пучка лучей выполняется соотношение $y = \alpha R$ с учетом малости угла α в приближении параксиальной оптики. Здесь y — расстояние от точки на фронте волны до оптической оси, α — угол между лучом, проходящем через рассматриваемую точку, и оптической осью. С учетом равенства $y = \alpha R$ получим $\frac{R}{n} = \frac{y}{n\alpha}$ — приведенный радиус равен отношению двух координат луча в формализме матричной оптики.

Пусть гомоцентрический пучок лучей проходит через оптическую систему с заданной матрицей $\hat{M} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. Тогда

$$\frac{R_2}{n_2} = \frac{y_2}{n_2\alpha_2} = \frac{Ay_1 + Bn_1\alpha_1}{Cy_1 + Dn_1\alpha_1} = \frac{A \cdot \frac{y_1}{n_1\alpha_1} + B}{C \cdot \frac{y_1}{n_1\alpha_1} + D} = \frac{A \cdot \frac{R_1}{n_1} + B}{C \cdot \frac{R_1}{n_1} + D}.$$

Откуда

$\frac{R_2}{n_2} = \frac{A\frac{R_1}{n_1} + B}{C\frac{R_1}{n_1} + D}$ — это и есть правило ABCD, или правило преобразования приведенного радиуса гомоцентрического пучка лучей.

Факультатив. Гауссов пучок — хорошее приближение для описания лазерного пучка лучей.

На первой лекции мы рассматривали частные решения волнового уравнения $\Delta E - \frac{1}{V_\phi^2} \cdot \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0$, которые получали методом разделения переменных. Сначала, разделяя временную и пространственные переменные, мы получили уравнение гармонических колебаний для зависимости от времени и уравнение Гельмгольца $\Delta R + k^2 R = 0$ для координатной зависимости. Далее, разделяя переменные в декартовых координатах, мы получили решения уравнения Гельмгольца в виде плоских волн.

Если при поиске частных решений уравнения Гельмгольца разделять переменные в других системах координат, то получаться решения с другой симметрией.

При разделении переменных в цилиндрической системе координат получается, в частности, волна со спиральной поверхностью равных фаз. Эта волна имеет так называемый орбитальный момент импульса:

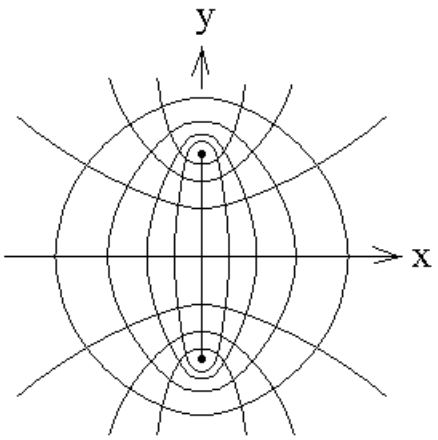
http://igorivanov.blogspot.com/2011/04/oam.html

Можно рассмотреть разделение переменных в эллиптической системе координат. В двумерном случае эллиптические координаты $\xi \geq 0$ и $0 \leq \eta \leq 2\pi$ вводится через декартовы координаты x, y, гиперболический синус sh и гиперболический косинус ch следующим образом:

$$\begin{cases} x = a \cdot sh(\xi) \cdot \sin(\eta) \\ y = a \cdot ch(\xi) \cdot \cos(\eta) \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} sh(\xi) \equiv \frac{e^{\xi} - e^{-\xi}}{2} \\ ch(\xi) \equiv \frac{e^{\xi} + e^{-\xi}}{2} \end{cases}.$$

В таком случае линии постоянного значения ξ являются эллипсами, а линии постоянного значения η — гиперболами.

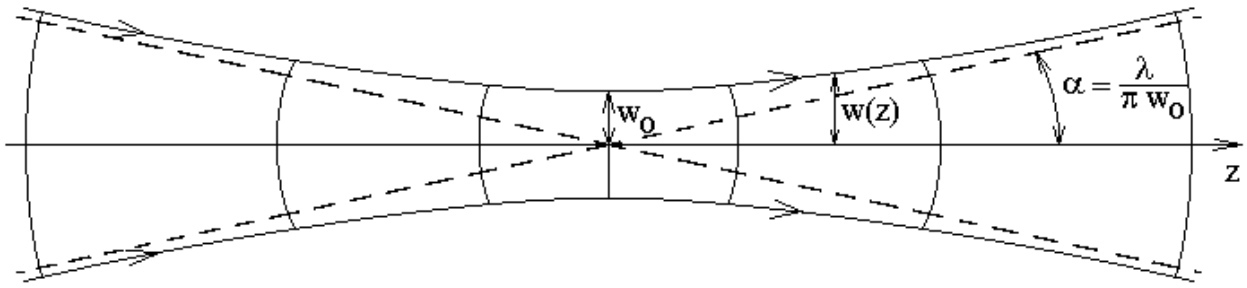
Все рассматриваемые эллипсы и гиперболы имеют два общих фокуса с декартовыми координатами $(0, a)$ и $(0, -a)$.



В трехмерном случае добавим в качестве третьей координаты угол поворота вокруг оси *x*.

Если при решении уравнения Гельмгольца $\Delta R + k^2 R = 0$ переменные разделять в эллиптической системе координат, то получатся решения, в которых лучи распространяются по гиперболам $\eta = const$. Если рассмотреть только лучи, составляющие малые углы с оптической осью, то получатся так называемые Гауссовы пучки. Гауссовы пучки являются хорошим приближением для описания излучения лазеров.

Изменим обозначение горизонтальной оси с x на z. Пусть световая волна распространяется вдоль оптической оси z и образует параксиальный пучок лучей. Примерный ход лучей и поверхности равных фаз изображены на ниже следующем рисунке.



Будем называть пучок лучей гауссовым, если комплексное поле $\tilde{E}$ световой волны можно найти по следующей формуле:

$$\tilde{E}(t,\vec{r}) = \tilde{E}_0 \cdot \frac{w_0}{w(z)} \cdot \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right) \cdot \exp\left(ik\left(z - \frac{x^2+y^2}{2R(z)}\right) + i\varphi(z)\right) \cdot \exp(-i\omega t) \tag{10.1}$$

где $\begin{cases} w^2(z) = w_0^2 \cdot \left[1 + \left(\dfrac{2z}{kw_0^2}\right)^2\right] \\ R(z) = -z \cdot \left[1 + \left(\dfrac{kw_0^2}{2z}\right)^2\right] \\ tg(\varphi(z)) = \dfrac{kw_0^2}{2z} \end{cases}$ (10.2)

В приближении параксиальной оптики справедливо неравенство $w_0 >> \lambda$.

Пунктирными линиями показаны асимптоты лучей при большом удалении от начала координат.

В формулах (10.1) и (10.2) величина $w(z)$ представляет собой зависимость радиуса пучка лучей от координаты z вдоль оптической оси, w_0 — радиус пучка лучей в самом узком месте, в так называемой шейке каустики при $z = 0$. Каустическая поверхность (каустика) в оптике — это поверхность, являющаяся огибающей семейства световых лучей, испущенных светящейся точкой и прошедших через оптическую систему. В приближении геометрической оптики эту поверхность имеет смысл рассматривать только с учетом сферической аберрации, которая будет рассмотрена позднее. В нашем случае каустическая поверхность — это поверхность, которая получается при вращении траектории одного луча на краю пучка лучей вокруг оптической оси. Величина $R(z)$ представляет собой зависимость радиуса кривизны гомоцентрического пучка лучей от координаты z вдоль оптической оси. $\varphi(z)$ — фазовый сдвиг относительно фазы плоской волны, если бы она распространялась вдоль оси z.

В формуле (10.1) для электрического поля E световой волны само поле E умышленно указано без значка вектора, так как направление вектора E различно в разных точках гауссова пучка. В каждой пространственной точке вектор E перпендикулярен лучу в этой точке.

Свойства гауссовых пучков.

1). Лучи распространяются по гиперболам, а не по прямым линиям, как того требует принцип Ферма (мы рассмотрим принцип Ферма чуть позднее).

2). Фазовая скорость волн в пустоте не равна универсальной константе c, так как сдвиг фаз $\varphi(z)$ в выражении (10.1) является функцией координаты z, что видно из третьей формулы системы (10.2). Фазовую скорость можно найти из уравнения поверхности равных фаз, которая получается, если приравнять фазу уравнения (10.1) константе:

$$kz - k\frac{x^2 + y^2}{2R(z)} + \varphi(z) - \omega t = const,$$

Для простоты рассмотрим фазовую скорость только вдоль оптической оси, когда $x = 0$ и $y = 0$, и получим

$$kz + \varphi(z) - \omega t = const .$$

Продифференцируем это уравнение по времени, считая z и φ функциями времени, и получим:

$$k\frac{dz}{dt} + \frac{d\varphi}{dz}\cdot\frac{dz}{dt} - \omega = 0 \quad => \quad V_{\phi} = \frac{dz}{dt} = \frac{\omega}{k + \frac{d\varphi}{dz}} > \frac{\omega}{k} = c .$$

Здесь неравенство получено с учетом производной от равенства $tg(\varphi) = \frac{kw_0^2}{2z}$ по z:

$$\frac{1}{\cos^2(\varphi)}\cdot\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{kw_0^2}{2z^2}, \text{ откуда } \frac{d\varphi}{dz} = -\frac{kw_0^2}{2z^2}\cdot\cos^2(\varphi) < 0 .$$

То есть фазовая скорость отличается от универсальной константы c.

3). Чем более узкой оказывается шейка каустики, тем больше расходимость пучка лучей.

Угловой диаметр расходимости равен $2\alpha = \frac{4\lambda}{\pi 2w_0} \approx \frac{\lambda}{2w_0}$. Такая величина угловой расходимости характерна для дифракции на препятствии размером $2w_0$, например для дифракции на отверстии диаметром $2w_0$.

4). Шейка каустики не отображается линзой по законам геометрической оптики. Это необходимо учитывать при попытке сфокусировать лазерное излучение.

Гауссов пучок после линзы снова становится гауссовым пучком, только с другими параметрами. Это позволяет найти, как линза изменяет положение шейки каустики.

На практике при попытке сфокусировать лазерное излучение возникает следующая задача. Известен радиус шейки каустики w_{01} и z_1 — координата линзы относительно шейки каустики. Требуется найти радиус шейки каустики w_{02} после линзы и координату линзы z_2 относительно новой шейки каустики. Для решения этой задачи нужно сделать следующее:

а). Сначала найдем R_1 — радиус кривизны фронта волны в точке с координатой $z = z_1$ непосредственно перед линзой по второй формуле системы (10.2)

$$R_1(z) = -z_1\cdot\left[1 + \left(\frac{k{w_{01}}^2}{2z_1}\right)^2\right]$$

по известным параметрам w_{01}, z_1 пучка лучей до линзы.

б). Найдем радиус w_1 пучка лучей на линзе по формуле 1 системы (10.2)

$$w_1^2(z) = w_{01}^2 \cdot \left[1 + \left(\frac{2z_1}{kw_{01}^2}\right)^2\right]$$

также по известным величинам w_{01}, z_1 пучка лучей до линзы.

Теперь будем искать параметры пучка лучей после линзы.

в). По правилу ABCD из величины радиуса кривизны фронта непосредственно перед линзой можно найти радиус кривизны сразу за линзой:

$$R_2 = \frac{AR_1 + B}{CR_1 + D},$$

где для тонкой линзы $\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\Phi & 1 \end{pmatrix}$.

Радиус пучка лучей при прохождении через тонкую линзу не изменяется, поэтому $w_2 = w_1$.

г). Решим теперь систему из первых двух уравнений системы (10.2)

$$\begin{cases} w_2^2(z_2) = w_{02}^2 \cdot \left[1 + \left(\dfrac{2z_2}{kw_{02}^2}\right)^2\right] \\ R_2(z_2) = -z_2 \cdot \left[1 + \left(\dfrac{kw_{02}^2}{2z_2}\right)^2\right] \end{cases}$$

относительно неизвестных величин w_{02} и z_2 для пучка лучей после линзы при уже известных величинах w_2 — радиуса пучка лучей на линзе, и R_2 — радиуса кривизны фронта волны сразу за линзой. Решение этой системы позволяет найти положение $-z_2$ новой шейки каустики относительно линзы и новый радиус шейки каустики w_{02}.