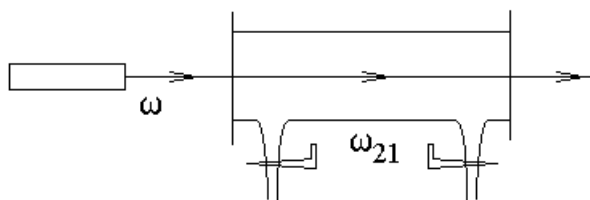


### Светоиндуцированный дрейф. Разделение изотопов.

Рассмотрим следующую оптическую схему. Пусть монохроматическое излучение лазера с частотой  $\omega$  проходит через кювету с газовой смесью двух изотопов.



Линии поглощения изотопов несколько сдвинуты по частоте друг относительно друга. Пусть частота излучения лазера лежит в пределах доплеровского контура линии поглощения одного из двух изотопов с центром на частоте  $\omega_{21}$ .

Пусть для определенности частота лазера выше частоты поглощающего перехода  $\omega > \omega_{21}$ . Тогда  $V_z = \frac{\omega - \omega_{21}}{k} > 0$ . Это означает, что излучение лазера поглощают молекулы, летящие в направлении луча. Поглощая свет и переходя в возбужденное состояние, молекулы разбухают, так как в возбужденном состоянии молекула имеет большие размеры, чем в невозмущенном состоянии. Большие молекулы чаще сталкиваются, так как имеют большую площадь поперечного сечения.

Рассмотрим два набора молекул одного и того же изотопа, но с противоположными значениями лучевой скорости. Пусть один из двух наборов молекул с лучевой скоростью  $V_z > 0$  взаимодействует со светом. Молекулы из этого набора летят вдоль лазерного луча, чаще сталкиваются и поэтому сильнее тормозятся. Следовательно, центр масс двух наборов молекул начинает смещаться навстречу лазерному лучу.

В результате поглощающий свет изотоп скапливается около окна кюветы, расположенного ближе к лазеру. Второй изотоп выдавливается из этой области в ту часть кюветы, которая расположена дальше от лазера.

Через один из кранов, расположенных в концах кюветы, можно откачать смесь, обогащенную одним из двух изотопов.

### Поляризация среды.

Поляризация — это электрический дипольный момент единицы объема.

При взаимодействии среды со световым полем в молекулах среды возникает дипольный момент, осциллирующий на частоте световой волны. Именно этот дипольный момент и связанная с ним поляризация среды на частоте световой волны нас и будут интересовать

$$\vec{P} \equiv \frac{d\vec{p}}{dV}, \text{ где } \vec{P} \text{ — поляризация среды, } \vec{p} \equiv \sum_i q_i \vec{r}_i \text{ — дипольный момент}$$

системы зарядов  $\{q_i\}$ , расположенных в точках с радиус-векторами  $\{\vec{r}_i\}$ .

$$\vec{P} = \int_{-\infty}^{+\infty} \vec{P}_{V_z} dV_z, \text{ где } \vec{P}_{V_z} \text{ — распределение поляризации по лучевой}$$

скорости молекул,  $\vec{P}_{V_z} dV_z$  — поляризация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ .

$\vec{P} = N_0 \cdot \langle \vec{p} \rangle$ , где  $N_0$  — концентрация молекул,  $\langle \vec{p} \rangle$  — среднее значение дипольного момента одной молекулы.

Рассмотрим поляризацию молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ :

$\vec{P}_{V_z} dV_z = N_{0V_z} dV_z \cdot \langle \vec{p}(V_z) \rangle$ , где  $N_{0V_z} dV_z$  — концентрация молекул с лучевыми скоростями в диапазоне от  $V_z$  до  $V_z + dV_z$ ,  $\langle \vec{p}(V_z) \rangle$  — средний дипольный момент этих молекул, который может зависеть от лучевой скорости  $V_z$ .

Для любой физической величины  $\langle F \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{F}) = \sum_{n,k} \rho_{kn} F_{nk}$ . Тогда

$$\langle p \rangle = Sp(\hat{\rho}\hat{p}) = \sum_{n,k} \rho_{kn} p_{nk} = \rho_{12} p_{21} + \rho_{21} p_{12} = p(\rho_{12} + \rho_{21}) = 2p \operatorname{Re}(\rho_{21}),$$

где  $\langle p \rangle$  — среднее значение проекции дипольного момента молекулы на единичный вектор поляризации световой волны,  $p$  в правой части равенства — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны (дипольный момент перехода).

При взаимодействии двухуровневой среды с монохроматическим световым полем в приближении вращающейся волны недиагональный элемент матрицы плотности имеет вид:

$$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21} e^{-i\varphi}, \text{ где } \varphi \equiv \omega t - kz - \varphi_0 \text{ — фаза световой волны,}$$

$$\tilde{\rho}_{21} = i \frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega}.$$

Тогда

$$\langle p \rangle = p(\rho_{12} + \rho_{21}) = p(\rho_{21}^* + \rho_{21}) = 2p \operatorname{Re} \left( i \frac{R}{2} \cdot \frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} e^{-i\varphi} \right) =$$

$$= pR(\rho_{11} - \rho_{22}) \frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2}.$$

Тогда

$$P_{V_z} = N_{0V_z} \langle p \rangle = N_{0V_z} pR(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)) \frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2},$$

$$\text{где } \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \\ R = \frac{p\varepsilon_0}{\hbar} \\ \varphi = -\varphi_0 + \omega t - kz \\ N_{0V_z} = \frac{N_0}{\sqrt{\pi U}} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \\ p = \int \psi_1^*(\vec{p}, \vec{e}) \psi_2 dV \\ \vec{p} = \sum_i q_i \vec{r}_i \\ \vec{E}(t) = \varepsilon_0 \vec{e} \cdot \cos(\varphi) \end{array} \right.$$

Получается, что поляризация среды пропорциональна амплитуде светового поля  $P \sim \varepsilon_0$ , но сдвинута по фазе относительно осцилляций светового поля.

Для описания такой поляризации вводят в рассмотрение комплексную восприимчивость среды.

Сначала введем комплексную напряженность  $\tilde{E}(t)$  световой волны, соответствующую вещественной напряженности  $E(t) = \varepsilon_0 \cos(\varphi)$ :

$$\tilde{E}(t) = \varepsilon_0 \cdot e^{-i\varphi}.$$

$$\text{Тогда } E(t) = \text{Re}(\tilde{E}(t)) = \frac{\tilde{E}(t) + \text{к.с.}}{2}.$$

$\tilde{P} = \tilde{\chi} \tilde{E}(t)$  — определение комплексной восприимчивости  $\tilde{\chi}$ , как коэффициента пропорциональности между комплексной поляризацией  $\tilde{P}$  и комплексной напряженностью  $\tilde{E}(t)$ .

Выразим комплексное число  $\tilde{\chi}$  через два вещественных числа  $\chi'$  и  $\chi''$ :

$$\tilde{\chi} = \chi' + i\chi''.$$

Выразим вещественную поляризацию среды, осциллирующую с частотой световой волны, через вещественную и мнимую части комплексной восприимчивости среды.

$$\begin{aligned} P &= \text{Re}(\tilde{P}) = \frac{\tilde{P} + \text{к.с.}}{2} = \frac{\tilde{\chi} \tilde{E}(t) + \text{к.с.}}{2} = \frac{1}{2} (\chi' + i\chi'') \varepsilon_0 e^{-i\varphi} + \text{к.с.} = \\ &= \frac{1}{2} (\chi' + i\chi'') \varepsilon_0 (\cos(\varphi) - i \sin(\varphi)) + \text{к.с.} = \varepsilon_0 (\chi' \cos(\varphi) + \chi'' \sin(\varphi)). \\ P &= \varepsilon_0 (\chi' \cos(\varphi) + \chi'' \sin(\varphi)). \end{aligned}$$

Соответствующее равенство для распределений:

$$P_{V_z} = \varepsilon_0 (\chi'_{V_z} \cos(\varphi) + \chi''_{V_z} \sin(\varphi)).$$

Сравним это выражение с полученным ранее выражением

$$P_{V_z} = N_{0V_z} pR (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)) \frac{\Gamma \cdot \sin(\varphi) - \Omega \cdot \cos(\varphi)}{\Gamma^2 + \Omega^2}.$$

Оба равенства справедливы для любого момента времени и, следовательно, для любой фазы  $\varphi$ . В таком случае можно приравнять коэффициенты при косинусе  $\varphi$  и при синусе  $\varphi$  этих двух выражений для  $P_{V_z}$ .

Тогда с учетом  $R = \frac{p\varepsilon_0}{\hbar}$  получим

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = \frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases}.$$

Здесь

$$\begin{cases} \rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma \sqrt{1+G}} \right) \right) \\ G = \frac{R^2}{2\Gamma} \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \\ R = \frac{p\varepsilon_0}{\hbar} \\ \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \end{cases}.$$

Следующее равенство

$$P = P_c \cos(\varphi) + P_s \sin(\varphi)$$

является определением синфазной  $P_c$  и квадратурной  $P_s$  амплитуд поляризации среды. Тогда с учетом равенства  $P = \varepsilon_0 (\chi' \cos(\varphi) + \chi'' \sin(\varphi))$  следует

$$\begin{cases} P_c = \chi' \varepsilon_0 \\ P_s = \chi'' \varepsilon_0 \end{cases}.$$

### **Обратное воздействие среды на волну. Дифференциальные уравнения для амплитуды поля или укороченные волновые уравнения.**

Излучение диполей среды изменяет проходящую мимо световую волну. Это изменение проявляется в поглощении света и изменении скорости распространения света в среде. Изменения в проходящей световой волне возникают в результате интерференции света переизлученного диполями молекул и проходящей мимо световой волны. В этом и состоит обратное воздействие среды на волну.

Вместо сложения волн излучения диполей изменение световой волны в среде можно вывести из системы уравнений Максвелла. Что мы и сделаем.

Рассмотрим систему уравнений Максвелла

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 4\pi\rho \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{4\pi}{c} \vec{j} + \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

без свободных зарядов  $\rho = 0$  и без токов проводимости  $\vec{j} = 0$ .

Тогда получим:

$$\left\{ \begin{array}{l} \operatorname{div}(\vec{D}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{E}) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \operatorname{div}(\vec{B}) = 0 \\ \operatorname{rot}(\vec{H}) = \frac{1}{c} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \end{array} \right.$$

Рассмотрим два выражения для ротора ротора  $\vec{E}$ .

С одной стороны, возьмем ротор от второго уравнения и подставим в правую часть вместо ротора  $\vec{B}$  выражение для ротора  $\vec{H}$  из четвертого уравнения. Напомним, что в оптике  $\mu = 1$  и  $\vec{B} = \vec{H}$ . Тогда получим

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\frac{1}{c} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot}(\vec{B}) = -\frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}.$$

А с другой стороны по правилу "бац минус цап":

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = [\vec{\nabla}, [\vec{\nabla}, \vec{E}]] = \vec{\nabla}(\vec{\nabla}, \vec{E}) - \vec{E}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}).$$

Здесь  $(\vec{\nabla}, \vec{E}) = \operatorname{div}(\vec{E}) = \frac{1}{\varepsilon} \operatorname{div}(\vec{D}) = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon} = 0$ , тогда

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E})) = -\vec{E}(\vec{\nabla}, \vec{\nabla}) = -\Delta \vec{E}.$$

Объединяя оба выражения для  $\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{E}))$ , получим:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.1)$$

-----  
Если подставить  $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$  в уравнение (4.1), то получим волновое уравнение для поля  $\vec{E}$ :

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \quad (4.2)$$

Сравнивая уравнение (4.2) с определением волнового уравнения в математике:

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{V^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$

получим величину фазовой скорости световых волн  $V = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}}$ . Сравнивая

величину скорости с определением показателя преломления  $V = \frac{c}{n}$ , получаем

$$n = \sqrt{\varepsilon}, \text{ точнее } n = \sqrt{\varepsilon\mu}, \text{ но в оптике } \mu \approx 1.$$

$$\text{Тогда } \varepsilon = n^2 \quad \Rightarrow \quad \vec{D} = n^2 \vec{E}$$

-----  
Векторы  $\vec{D}$  и  $\vec{E}$  можно связать друг с другом и несколько иначе:

$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$ , где  $\vec{P}$  — поляризация среды или объемная плотность дипольного момента, осциллирующая на световой частоте.

Разобьем поляризацию на два слагаемых  $\vec{P} = \vec{P}_{\text{нерез}} + \vec{P}_{\text{рез}}$ :

$$\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{\text{нерез}} + 4\pi\vec{P}_{\text{рез}}.$$

Здесь  $\vec{P}_{\text{рез}}$  — резонансный вклад в поляризацию или вклад двух уровней энергии, связанных переходом близким по частоте к частоте света;  $\vec{P}_{\text{нерез}}$  — нерезонансный вклад в поляризацию среды от остальных переходов.

По аналогии с формулой  $\vec{D} = n^2 \vec{E}$  запишем  $\vec{E} + 4\pi\vec{P}_{\text{нерез}} = n_0^2 \vec{E}$ , где  $n_0$  — показатель преломления среды вдали от рассматриваемой линии поглощения. Тогда

$$\vec{D} = n_0^2 \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{\text{рез}}.$$

Чтобы не тянуть за собой во всех формулах нижний индекс у поляризации будем во всех последующих формулах вместо  $\vec{P}_{\text{рез}}$  писать просто  $\vec{P}$ , подразумевая под  $\vec{P}$  вклад в поляризацию только от рассматриваемого перехода среды.

-----  
Подставим  $\vec{D} = n_0^2 \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{\text{рез}}$  в уравнение (4.1), заменим  $\vec{P}_{\text{рез}}$  на  $\vec{P}$  и получим

$$\Delta \vec{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \vec{P}}{\partial t^2} \quad (4.3)$$

Это — уравнение Даламбера или волновое уравнение с источниками поля.

Далее из этого уравнения мы хотим получить дифференциальное уравнение для амплитуды светового поля через амплитуду поляризации. Эти уравнения для амплитуд и называются укороченными волновыми уравнениями.

Будем рассматривать уравнение (4.3) для комплексных  $\vec{E}$  и  $\vec{P}$ . Для линейного уравнения с вещественными коэффициентами вещественная часть комплексного решения является вещественным решением.

Рассмотрим световую волну, распространяющуюся вдоль оси  $z$ , и линейно поляризованную вдоль оси  $y$ . Тогда  $\vec{P} \parallel \vec{E} \parallel \vec{e}_y$ . Для краткости записи отбросим векторные обозначения, и будем рассматривать только  $y$  проекции векторов.

Чтобы отличать комплексные величины от вещественных величин будем писать волну над комплексными величинами.

$$E = \text{Re}(\tilde{E}) \text{ и } P = \text{Re}(\tilde{P}).$$

Перепишем уравнение (4.3) для комплексных величин:

$$\Delta \tilde{E} - \frac{n_0^2}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} \quad (4.4)$$

Будем искать решение в виде

$\tilde{E} = \tilde{E}_0(t, z) \cdot e^{-i\varphi}$ , где ось  $z$  направлена вдоль направления распространения световой волны  $\varphi = \omega t - k_0 z - \varphi_0$  — фаза световой волны и будем рассматривать фазу, как фазу волны распространяющейся с фазовой скоростью  $\frac{c}{n_0}$ , а не со скоростью  $\frac{c}{n}$ , как на самом деле. Соответственно

$$k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} = \frac{2\pi\nu}{\lambda_0\nu} = \frac{\omega}{\frac{c}{n_0}} = \frac{n_0\omega}{c} \text{ — нерезонансное волновое число вместо } k = \frac{n\omega}{c}.$$

Несоответствие  $k_0$  настоящему  $k$  спрятано в зависимости амплитуды света  $\tilde{E}_0$  от  $z$  координаты.

Аналогично будем считать

$$\tilde{P} = \tilde{P}_0(t, z) \cdot e^{-i\varphi}, \text{ где } \varphi = \omega t - k_0 z - \varphi_0.$$

Получим теперь из уравнения (4.4) связь комплексных амплитуд  $\tilde{E}_0$  и  $\tilde{P}_0$ .

В уравнение надо подставить вторые производные, для которых введем более компактные обозначения:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial z^2} \equiv \tilde{E}'' \\ \frac{\partial^2 \tilde{E}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\tilde{E}} \\ \frac{\partial^2 \tilde{P}}{\partial t^2} \equiv \ddot{\tilde{P}} \end{array} \right.$$

Выразим эти производные через амплитуды поля и поляризации и подставим в уравнение (4.4).

Дифференцируя по  $z$  выражение  $\tilde{E} = \tilde{E}_0(t, z) \cdot e^{-i\varphi}$ , получим  $\tilde{E}' = \tilde{E}_0' e^{-i\varphi} + ik_0 \tilde{E}_0 e^{-i\varphi}$ . Тогда

$$\tilde{E}'' = \tilde{E}_0'' e^{-i\varphi} + 2ik_0 \tilde{E}_0' e^{-i\varphi} - k_0^2 \tilde{E}_0 e^{-i\varphi}.$$

Аналогично:

$$\ddot{\tilde{E}} = \ddot{\tilde{E}}_0 e^{-i\varphi} - 2i\omega \dot{\tilde{E}}_0 e^{-i\varphi} - \omega^2 \tilde{E}_0 e^{-i\varphi}$$

и

$$\ddot{\tilde{P}} = \ddot{\tilde{P}}_0 e^{-i\varphi} - 2i\omega \dot{\tilde{P}}_0 e^{-i\varphi} - \omega^2 \tilde{P}_0 e^{-i\varphi}.$$

Подставим все три выражения в уравнение (4.4), в котором  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ , так

как световая волна распространяется вдоль оси  $z$ , поэтому нет зависимости от координат  $x$  и  $y$  и вторые производные по ним равны нулю. После подстановки производных в уравнение (4.4) сократим это уравнение на  $e^{-i\varphi}$  и получим:

$$\tilde{E}_0'' + 2ik_0 \tilde{E}_0' - k_0^2 \tilde{E}_0 - \frac{n_0^2}{c^2} \ddot{\tilde{E}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2} 2i\omega \dot{\tilde{E}}_0 + \frac{n_0^2}{c^2} \omega^2 \tilde{E}_0 = \frac{4\pi}{c^2} \ddot{\tilde{P}}_0 - \frac{8\pi i\omega}{c^2} \dot{\tilde{P}}_0 - \frac{4\pi}{c^2} \omega^2 \tilde{P}_0 \quad (4.5)$$

Слагаемые  $-k_0^2 \tilde{E}_0$  и  $+\frac{n_0^2}{c^2} \omega^2 \tilde{E}_0$  в сумме равны нулю, так как  $k_0 = \frac{n_0 \omega}{c}$ .

Сократим эти два слагаемых в уравнении (4.5).

Амплитуды  $\tilde{E}_0$  и  $\tilde{P}_0$  — медленные функции координат и времени. Тогда высокими производными от амплитуд можно пренебречь по сравнению с низкими производными. Оставим в уравнении (4.5) только наибольшие слагаемые  $\dot{\tilde{P}}_0$ ,  $\dot{\tilde{E}}_0$ ,  $\tilde{E}_0'$  для амплитуд  $\tilde{E}_0$  и  $\tilde{P}_0$ , отбросим более высокие производные и получим:

$$2ik_0 \tilde{E}_0' + 2i \frac{n_0^2}{c^2} \omega \dot{\tilde{E}}_0 = -\frac{4\pi}{c^2} \omega^2 \tilde{P}_0 \quad | \cdot \frac{1}{2ik_0} \Rightarrow$$

$$\tilde{E}_0' + \frac{n_0}{c} \dot{\tilde{E}}_0 = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \quad (4.6)$$

Это и есть укороченное волновое уравнение или уравнение для комплексных амплитуд поля и поляризации.

Получим другую форму уравнения.

Рассмотрим выражение для дифференциала комплексной амплитуды светового поля  $\tilde{E}_0$ , как функции координаты  $z$  и времени  $t$ :

$$d\tilde{E}_0 = \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial z} dz + \frac{\partial \tilde{E}_0}{\partial t} dt = \tilde{E}_0' dz + \dot{\tilde{E}}_0 dt$$



Разделим это равенство на дифференциал координаты  $dz$  и получим:

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = \tilde{E}_0' + \frac{dt}{dz} \cdot \dot{\tilde{E}}_0.$$

Пусть  $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_0}$ , тогда

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = \tilde{E}_0' + \frac{n_0}{c} \dot{\tilde{E}}_0 \quad (4.7)$$

Это совпадает с левой частью уравнения (4.6).

Какой смысл приравнивания  $\frac{dz}{dt} = \frac{c}{n_0}$ ?

При этом условии мы берем производную  $\frac{d\tilde{E}_0}{dz}$ , как бы сидя верхом на гребне световой волны, которая распространяется со скоростью  $\frac{c}{n_0}$ . Это так называемая полная производная, она аналогична, например, производной  $\frac{d\rho_{11}}{dt}$  в рассмотренных ранее уравнениях для матрицы плотности, где  $\frac{d\rho_{11}}{dt}$  — полная производная в системе отсчета атома или как бы сидя верхом на атоме.

Выражение  $\frac{d\tilde{E}_0}{dz}$  — производная, которая показывает, что происходит с амплитудой световой волны по мере распространения волны вдоль оси  $z$ .

Подставим (4.7) в (4.6) и получим

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \quad (4.8)$$

Это то же самое укороченное волновое уравнение, что и (4.6), но в другой форме.

Получим теперь аналоги комплексных уравнений (4.6) и (4.8) в вещественном виде.

Вместо одной комплексной амплитуды  $\tilde{P}_0$  рассмотрим две вещественные амплитуды  $P_c$  и  $P_s$ . Здесь  $P_c$  — синфазная по отношению к световому полю амплитуда, а  $P_s$  — квадратурная амплитуда поляризации, сдвинутая по фазе на  $\frac{\pi}{2}$  относительно фазы светового поля.

$P = P_c \cos(\varphi) + P_s \sin(\varphi) = \text{Re}\left((P_c + iP_s) \cdot e^{-i\varphi}\right)$ , тогда комплексная амплитуда поляризации выражается через две вещественные амплитуды следующим образом:

$$\tilde{P}_0 = P_c + iP_s.$$

Аналогичное выражение получаем для напряженности светового поля:

$$\tilde{E}_0 = E_c + iE_s.$$

Подставим эти выражения в уравнения (4.6) и (4.8). В каждом из полученных комплексных уравнений можно приравнять друг другу вещественные части и мнимые части. В результате получим укороченные волновые уравнения в вещественном виде:

$$\begin{cases} E'_c + \frac{n_0}{c} \dot{E}_c = -2\pi \frac{\omega}{n_0 c} P_s \\ E'_s + \frac{n_0}{c} \dot{E}_s = +2\pi \frac{\omega}{n_0 c} P_c \end{cases} \text{ из уравнения (4.6) и}$$

$$\begin{cases} \frac{dE_c}{dz} = -\frac{2\pi\omega}{n_0 c} P_s \\ \frac{dE_s}{dz} = +\frac{2\pi\omega}{n_0 c} P_c \end{cases} \text{ из уравнения (4.8).}$$

Рассмотрим частный случай применения укороченных волновых уравнений для прохождения света через оптически тонкий слой среды толщиной  $\Delta z$ .

$\tilde{E}_{0_{\text{вых}}} = \tilde{E}_{0_{\text{вх}}} + \frac{d\tilde{E}_0}{dz} \Delta z$ , где  $\tilde{E}_{0_{\text{вых}}}$  — амплитуда света на выходе из среды,  $\tilde{E}_{0_{\text{вх}}}$  — амплитуда на входе.

На входе  $\begin{cases} E_c = \mathcal{E}_0 \\ E_s = 0 \end{cases}$ , тогда

$$\begin{cases} E_{c_{\text{вых}}} = \mathcal{E}_0 - \frac{2\pi\omega}{n_0 c} P_s \cdot \Delta z \\ E_{s_{\text{вых}}} = \frac{2\pi\omega}{n_0 c} P_c \cdot \Delta z \end{cases} \text{ — световое поле на выходе из слоя среды,}$$

где

$$\begin{cases} P_c = \int P_{c_{V_z}} dV_z = \mathcal{E}_0 \int \chi'_{V_z} dV_z \\ P_s = \int P_{s_{V_z}} dV_z = \mathcal{E}_0 \int \chi''_{V_z} dV_z \end{cases},$$

и в свою очередь

$$\begin{cases} \chi'_{V_z} = -\frac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \\ \chi''_{V_z} = +\frac{p^2 \cdot N_{0_{V_z}} \cdot (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{cases},$$

как это было показано в вопросе о поляризации среды.

Здесь

$p = \int \psi_1^* \cdot (\vec{p}, \vec{e}) \cdot \psi_2 \cdot dV$  — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны.

$N_0(V_z) = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} \cdot e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$  — распределение концентрации по лучевой скорости молекул.

$U = \sqrt{\frac{2k_B T}{m}}$  — наиболее вероятная скорость молекул газа при температуре  $T$ ,  $k_B$  — постоянная Больцмана.

$$\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma\sqrt{1+G}}\right) \right), \text{ где}$$

$$G \equiv \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \text{ — фактор насыщения, } R = \frac{p\epsilon_0}{\hbar} \text{ — частота Раби,}$$

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$  — расстройка частоты света в системе отсчета атома относительно частоты перехода.

### Показатель преломления и коэффициент поглощения среды.

$$\begin{cases} \tilde{P} = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E} \\ \tilde{P} = \tilde{P}_0 \cdot e^{-i\varphi} \\ \tilde{E} = \tilde{E}_0 \cdot e^{-i\varphi} \end{cases} \Rightarrow$$

$\tilde{P}_0 = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E}_0$  — комплексная восприимчивость  $\tilde{\chi}$  является не только коэффициентом пропорциональности между комплексной поляризацией  $\tilde{P}$  и комплексной напряженностью световой волны  $\tilde{E}$ , но и является коэффициентом пропорциональности между амплитудами комплексной поляризации и комплексной напряженности световой волны.

Подставим  $\tilde{P}_0 = \tilde{\chi} \cdot \tilde{E}_0$  в укороченное волновое уравнение

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \text{ и получим}$$

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{\chi} \tilde{E}_0.$$

Решение этого дифференциального уравнения — экспонента:

$$\tilde{E}_0(z) = \epsilon_0 e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{\chi} z} = \epsilon_0 e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \chi' z} e^{-2\pi \frac{\omega}{n_0 c} \chi'' z}.$$

Сравним это решение с ожидаемым выражением:

$$\tilde{E}_0(z) = \varepsilon_0 e^{i(k-k_0)z} e^{-\frac{\aleph}{2}z}.$$

Обсудим, почему это выражение ожидаемое.

Сомножитель  $e^{-\frac{\aleph}{2}z}$  связан с определением коэффициента поглощения  $\aleph$  через интенсивность света  $I$ :

$$\begin{cases} I = I_0 e^{-\aleph z} \\ I \sim E_0^2 \end{cases} \Rightarrow E_0 \sim e^{-\frac{\aleph}{2}z}.$$

Сомножитель  $e^{i(k-k_0)z}$  в выражении для  $\tilde{E}_0(z)$  связан с тем, что реальная скорость света в среде  $\frac{c}{n}$  заменена нами при выводе укороченных волновых уравнений скоростью  $\frac{c}{n_0}$ , что соответствует замене  $k = \frac{n\omega}{c}$  на  $k_0 = \frac{n_0\omega}{c}$ .

Вместо  $\tilde{E} \sim e^{-i(\omega t - kz - \varphi_0)}$  мы при выводе укороченных волновых уравнений использовали формулу  $\tilde{E} \sim \tilde{E}_0 e^{-i(\omega t - k_0 z - \varphi_0)}$ . Сравнивая обе формулы получим, что

$$\tilde{E}_0 \sim e^{i(k-k_0)z}.$$

Тогда, сравнивая два выражения для  $\tilde{E}_0(z)$

$$\begin{cases} \tilde{E}_0(z) = \varepsilon_0 e^{2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \chi' z} e^{-2\pi \frac{\omega}{n_0 c} \chi'' z} \\ \tilde{E}_0(z) = \varepsilon_0 e^{i(k-k_0)z} e^{-\frac{\aleph}{2}z} \end{cases}, \text{ получим:}$$

$$\begin{cases} k - k_0 = \frac{2\pi\omega}{n_0 c} \chi' \\ \aleph = \frac{4\pi\omega}{n_0 c} \chi'' \end{cases}.$$

С учетом  $n = k \frac{c}{\omega}$  первое уравнение можно изменить, тогда

$$\begin{cases} n - n_0 = \frac{2\pi}{n_0} \chi' \\ \aleph = \frac{4\pi\omega}{n_0 c} \chi'' \end{cases}, \text{ где } \begin{cases} \chi' = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi'_{V_z} dV_z \\ \chi'' = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi''_{V_z} dV_z \end{cases} \text{ и}$$

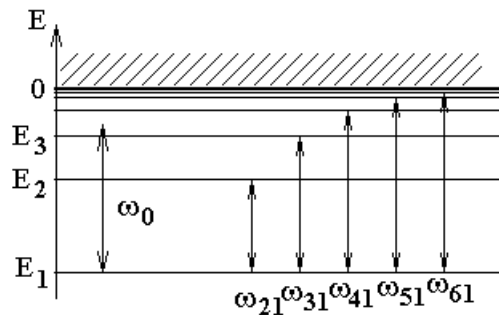
$$\left\{ \begin{array}{l} \chi'_{V_z} = - \frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2}, \\ \chi''_{V_z} = + \frac{p^2 N_{0V_z} (\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z))}{\hbar} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \end{array} \right., \text{ где } \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21},$$

$$\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \cdot \left( 1 - \frac{G}{1+G} \cdot \mathcal{L} \left( \frac{\Omega}{\Gamma \sqrt{1+G}} \right) \right), \text{ где}$$

$$G \equiv \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left( \frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2} \right) \text{ — фактор насыщения, } R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} \text{ — частота Раби,}$$

**Неравенство  $n_0 > 1$  в области прозрачности среды, как влияние хвостов высокочастотных линий поглощения.**

Рассмотрим свет с частотой  $\omega_0$  в области прозрачности среды. Пусть молекулы среды находятся на нижнем уровне энергии. Оказывается, что справа от частоты  $\omega_0$  много линий поглощения  $\omega_{n1}$ , то есть неравенство  $\omega_0 < \omega_{n1}$  бывает часто, а слева от частоты  $\omega_0$  линий поглощения мало, то есть неравенство  $\omega_{n1} < \omega_0$  бывает редко. Это видно из рисунка



Если линия поглощения  $\omega_{n1}$  находится справа от частоты света  $\omega_0$ , то расстройка  $\Omega$  частоты света относительно частоты перехода отрицательная

$$\omega_0 < \omega_{nk} \Rightarrow \Omega = \omega_0 - \omega_{nk} < 0 \Rightarrow \chi' \sim \left( -\frac{\Omega}{\Gamma^2 + \Omega^2} \right) > 0 \Rightarrow$$

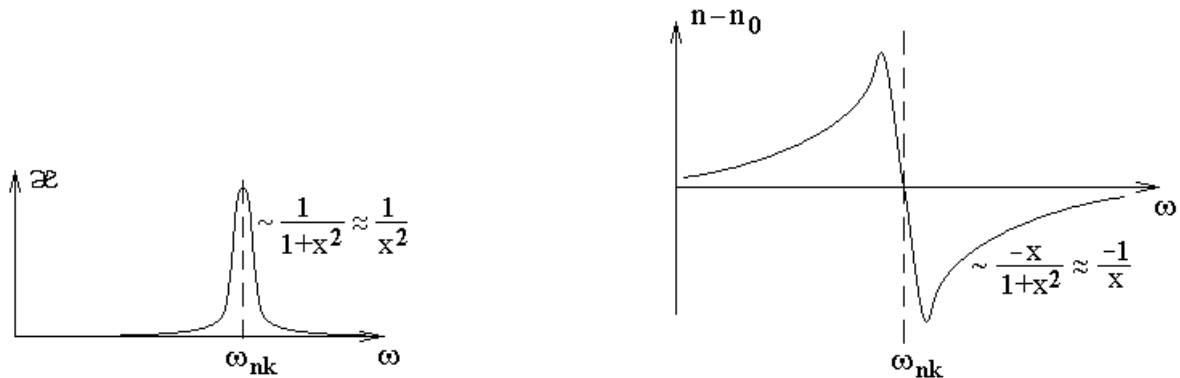
$$n - n_0 = \frac{2\pi}{n_0} \chi' > 0 \Rightarrow n - n_0 > 0$$

То есть рассматриваемая линия поглощения  $\omega_{n1}$  дает положительную добавку к показателю преломления.

Поскольку линий поглощения справа от частоты света всегда много, и их вклады в показатель преломления положительны, сам показатель преломления в области прозрачности среды оказывается больше, чем в вакууме:

$$n_0 > 1.$$

При большом частотном удалении от линии поглощения коэффициент поглощения убывает пропорционально  $\frac{1}{x^2}$ , а добавка к коэффициенту поглощения убывает гораздо медленнее, пропорционально  $\frac{1}{x}$ , где  $x = \frac{\Omega}{\Gamma}$  — безразмерная частотная расстройка. Поведение обеих величин в зависимости от частоты света изображено на нижеследующих рисунках.



Относительно быстрый спад коэффициента поглощения приводит к тому, что в частотной области, где поглощения практически нет и коэффициент поглощения равен нулю, показатель преломления заметно отличается от единицы.

### Понятие о дисперсионном соотношении Крамерса-Кронига.

Сигнал на выходе устройства не может появиться раньше, чем на его входе.

Пусть электрическое (или оптическое) устройство имеет комплексный коэффициент передачи  $\tilde{K}(\omega)$ , где

$$\tilde{U}_{вых\omega} = \tilde{K}(\omega) \cdot \tilde{U}_{вх\omega}.$$

Пусть  $U_{вх}(t) = \delta(t)$  — дельта-функция Дирака. Тогда

$$\tilde{U}_{вх\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \cdot U(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t} \cdot \delta(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi} e^{-i\omega \cdot 0} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \cdot dt = \frac{1}{2\pi}$$

Тогда

$$\tilde{U}_{вых\omega} = \tilde{K}(\omega) \cdot \tilde{U}_{вх\omega} = \frac{1}{2\pi} \tilde{K}(\omega) \quad \Rightarrow$$

$$U_{вых}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot \tilde{U}_{вых\omega} \cdot d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot \tilde{K}(\omega) \cdot d\omega.$$

Сигнал на выходе схемы не может появиться раньше, чем сигнал появляется на входе, тогда  $U_{вых}(t) = 0$  при  $t < 0$ , так как  $U_{вх}(t) = \delta(t) = 0$  при  $t < 0$ . Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega t} \cdot \tilde{K}(\omega) \cdot d\omega = 0 \text{ при } t < 0.$$

Амплитудно-частотная и фазо-частотная характеристики любой схемы связаны приведенным выше интегральным соотношением.

-----

В оптике коэффициент передачи тонкого слоя  $\tilde{K}(\omega)$  определяется комплексной поляризуемостью молекул  $\tilde{\alpha}(\omega)$ , то есть коэффициентом пропорциональности между комплексным дипольным моментом молекулы  $\tilde{p}(\omega)$  и комплексной напряженностью светового поля  $\tilde{E}(\omega)$ :

$$\tilde{p}(\omega) = \tilde{\alpha}(\omega) \cdot \tilde{E}(\omega), \text{ где } \tilde{\alpha}(\omega) = \alpha' + i\alpha''.$$

С дипольным комплексным моментом молекул  $\tilde{p}$  связана комплексная поляризация среды  $\tilde{P} = N_0 \tilde{p}$ , где  $N_0$  — концентрация молекул.

Из вещественности  $P(t)$  и  $E(t)$  можно доказать, что

$$\begin{cases} \alpha'(-\omega) = \alpha'(\omega) \\ \alpha''(-\omega) = -\alpha''(\omega) \end{cases}.$$

Крамерс (1927) и Крониг (1926) рассматривали интеграл  $\int \frac{\tilde{\alpha}(\omega)}{\omega - \omega_0} d\omega$ , в

котором интегрирование ведется по замкнутому контуру на комплексной плоскости. Интегрирование ведется в положительном направлении вдоль всей вещественной оси, и контур замыкается по полуокружности в верхней полуплоскости.

Крамерсу и Кронигу, используя условие  $\tilde{\alpha}(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0$ , удалось взять интеграл по вычетам и доказать, что

$$\begin{cases} \alpha'(\omega_0) = \frac{2}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\omega \alpha''(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \\ \alpha''(\omega_0) = -\frac{2\omega_0}{\pi} \mathcal{P} \int_0^{\infty} \frac{\alpha'(\omega)}{\omega^2 - \omega_0^2} d\omega \end{cases}.$$

Здесь  $\mathcal{P} \int$  — интеграл в смысле главного значения. Эти интегральные связи между  $\alpha'(\omega)$  и  $\alpha''(\omega)$  означают, что интегрально связаны зависимость коэффициента поглощения от частоты света и зависимость показателя преломления от частоты света. Для оптически тонкого слоя:

$$\begin{cases} \alpha' \sim \chi' \sim (n - n_0) \\ \alpha'' \sim \chi'' \sim \kappa \end{cases}.$$