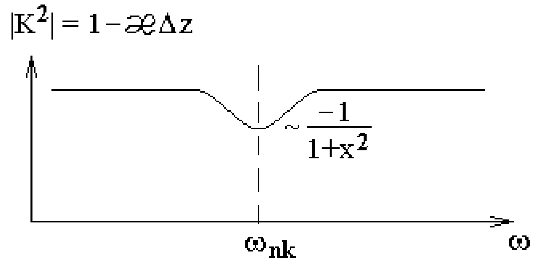
<u>Понятие о дисперсионном соотношении Крамерса-Кронига</u> <u>(продолжение)</u>**.**

В свою очередь от добавки к показателю преломления и от коэффициента поглощения зависит комплексный коэффициент передачи оптически тонкого слоя $\tilde{K}(\omega)$:

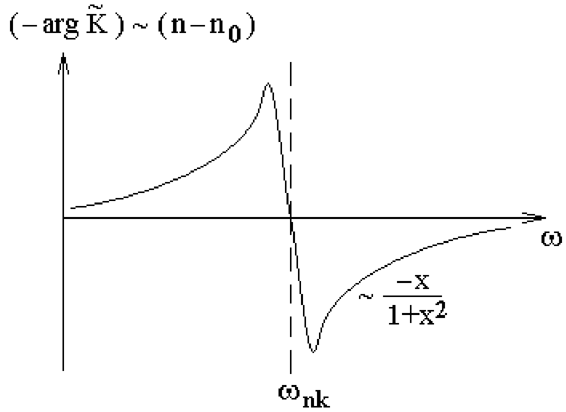
$$\begin{cases} \left|\tilde{K}^2\right| = 1 - \aleph \cdot \Delta z \\ -\arg\left(\tilde{K}\right) \sim \left(n - n_0\right) \end{cases}.$$

Так если амплитудный коэффициент пропускания имеет провал лоренцевской формы



,

то показатель преломления имеет добавку в виде всплеска дисперсионной формы:



.

Если форма провала не совсем лоренцевская, то и форма всплеска не совсем дисперсионная.

<u>Скоростные уравнения или уравнения баланса.</u>

Скоростные уравнения — это приближение, которое получается из условия

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$$

и уравнений для матрицы плотности в приближении вращающейся волны:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1\rho_{11} = \gamma_1\rho_{11}^0 - i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2\rho_{22} = \gamma_2\rho_{22}^0 + i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right), \\ \dot{\tilde{\rho}}_{21} - i\Omega\tilde{\rho}_{21} + \Gamma\tilde{\rho}_{21} = i\dfrac{R}{2}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right) \end{cases} \tag{5.1}$$

где

$R = \dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби,

$p = \int\limits_{V=\infty} \psi_1^*\left(\vec{p},\vec{e}\right)\psi_2 dV$ — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны,

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света относительно частоты перехода в системе отсчета молекулы,

$\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21}e^{-i\varphi}$ — недиагональный элемент матрицы плотности,

$\varphi = \omega t - kz - \varphi_0$ — фаза световой волны.

Нас в дальнейшем будет интересовать взаимодействие двух световых волн со средой. Если световые волны встречные, то в системе отсчета молекулы две волны будут иметь разные частоты, даже если в лабораторной системе отсчета частоты одинаковы. В таком случае в системе отсчета молекулы амплитуда суммарного светового поля испытывает биения, поэтому условие $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ не выполнено даже для стационарных явлений с двумя световыми волнами.

Однако при условии слабого светового поля, когда $G \ll 1$, так называемые когерентные нестационарные эффекты в наблюдаемых величинах усредняются, и скоростные уравнения дают хорошее приближение.

Подставим $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$ в третье уравнение системы (5.1) и получим

$$\tilde{\rho}_{21} = i\frac{R}{2}\cdot\frac{\rho_{11} - \rho_{22}}{\Gamma - i\Omega} \qquad =>$$

$$\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21} = \tilde{\rho}_{21}^* - \tilde{\rho}_{21} = -i\frac{R}{2}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)\cdot\frac{2\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} \qquad =>$$

$$i\frac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12} - \tilde{\rho}_{21}\right) = \frac{R^2\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right)}{2\Gamma}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right),$$ где

$$\mathscr{L}(x) \equiv \frac{1}{1 + x^2}$$ — лоренцевский контур =>

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} + \gamma_1 \rho_{11} = \gamma_1 \rho_{11}^0 - \dfrac{R^2}{2\Gamma}(\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{\rho}_{22} + \gamma_2 \rho_{22} = \gamma_2 \rho_{22}^0 + \dfrac{R^2}{2\Gamma}(\rho_{11} - \rho_{22}) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

Умножим систему на распределение концентрации по лучевой скорости $N_{0_{V_z}}$ и получим

$$\begin{cases} \dot{N}_{1_{V_z}} + \gamma_1 N_{1_{V_z}} = \gamma_1 N_{1_{V_z}}^0 - \dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{N}_{2_{V_z}} + \gamma_2 N_{2_{V_z}} = \gamma_2 N_{2_{V_z}}^0 + \dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases} \qquad (5.2)$$

Это почти скоростные уравнения, осталось заменить величину R^2 на более традиционное выражение.

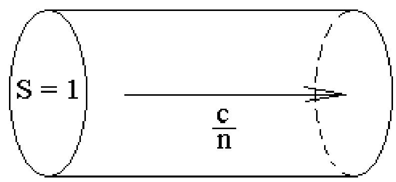
Для получения нового вида уравнений нам понадобятся две новые величины: J и σ.

Введем в рассмотрение J — плотность потока фотонов. Эта величина связана с интенсивностью света I, которая представляет собой плотность потока энергии светового поля. Тогда

$$J \equiv \frac{I}{h\nu},$$

где $I \equiv \left\langle \left| \vec{S} \right| \right\rangle$, где угловые скобки означают усреднение по времени, $\vec{S} = \dfrac{c}{4\pi}\left[\vec{E}, \vec{H}\right]$ — вектор Пойнтинга.

Рассмотрим цилиндр со световым полем, объемная плотность которого w, а фазовая скорость — $\dfrac{c}{n}$.



Пусть площадь сечения цилиндра равна единице, а длина — $\dfrac{c}{n}$. Тогда объем цилиндра равен их произведению $\dfrac{c}{n}$, а энергия светового поля в этом объеме равна $w\dfrac{c}{n}$. Вся эта энергия в единицу времени пройдет через единичную площадку. Следовательно,

$$I = \langle w \rangle \frac{c}{n}.$$

Объемную плотность энергии w можно выразить через амплитуду светового поля $\mathcal{E}_0$. И действительно

$$w = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\vec{D},\vec{E}\right) + \left(\vec{B},\vec{H}\right)\right\}.$$

В оптике $\mu = 1$ и $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$ в бегущей световой волне, тогда

$$w = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\vec{D},\vec{E}\right) + \left(\vec{B},\vec{H}\right)\right\} = \frac{1}{8\pi}\left\{\varepsilon E^2 + \mu H^2\right\} = \frac{1}{4\pi}\varepsilon E^2 = \frac{n^2 E^2}{4\pi}.$$

$$E = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad => \quad \left\langle E^2 \right\rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \quad =>$$

$$\langle w \rangle = \frac{n^2 \mathcal{E}_0{}^2}{8\pi}.$$

Тогда

$$J = \frac{I}{h\nu} = \langle w \rangle \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{nc\mathcal{E}_0{}^2}{8\pi\hbar\omega}.$$

Оказывается, что в этом выражении нужно заменить $n \to n_0$.

Такая странность имеет две причины.

Во-первых, часть энергии светового поля принято считать энергией, запасенной в среде. Дело в том, что $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, где поляризация $\vec{P}$ имеет два слагаемых: резонансное $\vec{P}_{рез}$ и нерезонансное $\vec{P}_{нерез}$. Резонансный вклад связан с тем, что молекула может поглощать или излучать свет, только одновременно находясь на двух уровнях энергии. Следовательно, резонансный вклад в поляризацию неразрывно связан с частичным заселением возбужденного уровня энергии. По этой причине соответствующую энергию рассматривают, как энергию среды, а не как энергию светового поля. Тогда обозначим вектор электрического смещения без резонансного вклада в поляризацию, как

$\vec{D}_0 = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{нерез} = n_0^2\vec{E}$, что аналогично $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E} = n^2\vec{E}$.

Соответственно объемная плотность энергии $\left\langle w_0 \right\rangle = \dfrac{n_0^2 \mathcal{E}_0{}^2}{8\pi}$.

Кроме того, рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы договорились рассматривать свет, как будто он распространяется со скоростью $\dfrac{c}{n_0}$, а не $\dfrac{c}{n}$.

В результате

$$J = \left\langle w_0 \right\rangle \cdot \frac{c}{n_0} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{n_0 c \mathcal{E}_0{}^2}{8\pi\hbar\omega}.$$

Введем теперь в рассмотрение новую величину σ — сечение поглощения, которая по своему физическому смыслу должна быть равна площади тени молекулы. Через сечение поглощения σ может быть выражен коэффициент поглощения $\aleph$.

Коэффициент поглощения определяется зависимостью изменения интенсивности света по мере его распространения в поглощающей среде:

$$I(z) = I(0) \cdot e^{-\aleph z}$$

С учетом равенства $J \equiv \frac{I}{h\nu}$ получим

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-\aleph z}.$$

$(N_1 - N_2)$ — эффективная концентрация поглощающих свет молекул, так как при одинаковых заселенностях верхнего и нижнего уровней энергии число переходов снизу вверх равно числу вынужденных переходов сверху вниз, и поглощение света отсутствует.

$(N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$ — число этих как бы поглощающих свет молекул в объеме $S \cdot dz$.

$\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$ — площадь тени этих молекул.

$\dfrac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S}$ — относительная площадь тени или вероятность поглощения фотона на длине dz.

$\left|\dfrac{dJ}{J}\right|$ — тоже вероятность поглощения для фотона на длине dz.

Тогда

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S} \qquad =>$$

$$\frac{dJ}{J} = -\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot dz \qquad =>$$

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot z}.$$

Сравним это выражение с другим: $J(z) = J(0) \cdot e^{-\aleph z}$ и получим

$$\aleph = (N_1 - N_2) \cdot \sigma.$$

В случае неоднородного уширения спектральной линии $\Gamma << kU$ величины $\aleph, \sigma, N_1, N_2$ зависят от лучевой скорости V_z, так как частота света в системе от счета молекулы $\omega' = \omega - kV_z$ зависит от V_z.

Поглощение среды складывается из поглощения молекул с разными лучевыми скоростями

$$\aleph = \int_{-\infty}^{+\infty} \aleph_{V_z} dV_z .$$

Соотношение $\aleph = (N_1 - N_2)\cdot\sigma$ можно записать для молекул, лучевая скорость которых лежит в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$:

$$\aleph_{V_z} dV_z = \left(N_{1_{V_z}} dV_z - N_{2_{V_z}} dV_z\right)\cdot\sigma(V_z) \qquad =>$$

$$\aleph_{V_z} = \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right)\cdot\sigma(V_z) \qquad =>$$

$$\sigma(V_z) = \frac{\aleph_{V_z}}{N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}}.$$

Рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы получили, что поглощение среды пропорционально мнимой части комплексной восприимчивости среды $\aleph_{V_z} = \frac{4\pi\omega}{cn_0}\chi''_{V_z}$, тогда

$$\sigma(V_z) = \frac{\frac{4\pi\omega}{cn_0}\chi''_{V_z}}{N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}}.$$

Рассматривая влияние монохроматической световой волны на среду, мы получили выражение для мнимой части комплексной восприимчивости среды

$$\chi''_{V_z} = \frac{p^2 N_{0_{V_z}}\left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z)\right)}{\hbar}\cdot\frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} = \frac{p^2\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right)}{\hbar\Gamma}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \qquad =>$$

$$\frac{\chi''_{V_z}}{N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}} = \frac{p^2}{\hbar\Gamma}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Подставим это отношение в формулу для сечения поглощения $\sigma(V_z) = \frac{\frac{4\pi\omega}{cn_0}\chi''_{V_z}}{N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}}$ и получим

$$\sigma(V_z) = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma}\cdot\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \qquad =>$$

$$\sigma(V_z) = \sigma_0\,\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Здесь $\sigma_0 = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma}$ — амплитуда сечения поглощения, $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего переходы.

Из формулы $\sigma\left(V_z\right)=\sigma_0\,\mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)$ следует, что форма линии поглощения каждой молекулы — лоренцевский контур с шириной 2Γ, где Γ — скорость затухания недиагонального элемента матрицы плотности, она же — скорость затухания поляризации среды.
