<u>Скоростные уравнения или уравнения баланса.</u>

Скоростные уравнения — это приближение, которое получается из условия

$$\dot{\tilde{\rho}}_{21}=0$$

и уравнений для матрицы плотности в приближении вращающейся волны:

$$\begin{cases}\dot{\rho}_{11}+\gamma_1\rho_{11}=\gamma_1\rho_{11}^0-i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12}-\tilde{\rho}_{21}\right)\\ \dot{\rho}_{22}+\gamma_2\rho_{22}=\gamma_2\rho_{22}^0+i\dfrac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12}-\tilde{\rho}_{21}\right),\\ \dot{\tilde{\rho}}_{21}-i\Omega\tilde{\rho}_{21}+\Gamma\tilde{\rho}_{21}=i\dfrac{R}{2}\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)\end{cases}\qquad(5.1)$$

где

$R=\dfrac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$ — частота Раби,

$p=\int\limits_{V=\infty}\psi_1^*\left(\vec{p},\vec{e}\right)\psi_2dV$ — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны,

$\Omega=\omega-kV_z-\omega_{21}$ — расстройка частоты света относительно частоты перехода в системе отсчета молекулы,

$\rho_{21}=\tilde{\rho}_{21}e^{-i\varphi}$ — недиагональный элемент матрицы плотности,

$\varphi=\omega t-kz-\varphi_0$ — фаза световой волны.

Нас в дальнейшем будет интересовать взаимодействие двух световых волн со средой. Если световые волны встречные, то в системе отсчета молекулы две волны будут иметь разные частоты, даже если в лабораторной системе отсчета частоты одинаковы. В таком случае в системе отсчета молекулы амплитуда суммарного светового поля испытывает биения, поэтому условие $\dot{\tilde{\rho}}_{21}=0$ не выполнено даже для стационарных явлений с двумя световыми волнами.

Однако при условии слабого светового поля, когда $G<<1$, так называемые когерентные нестационарные эффекты в наблюдаемых величинах усредняются, и скоростные уравнения дают хорошее приближение.

Подставим $\dot{\tilde{\rho}}_{21}=0$ в третье уравнение системы (5.1) и получим

$$\tilde{\rho}_{21}=i\frac{R}{2}\cdot\frac{\rho_{11}-\rho_{22}}{\Gamma-i\Omega}\qquad=>$$

$$\tilde{\rho}_{12}-\tilde{\rho}_{21}=\tilde{\rho}_{21}^*-\tilde{\rho}_{21}=-i\frac{R}{2}\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)\cdot\frac{2\Gamma}{\Gamma^2+\Omega^2}\qquad=>$$

$$i\frac{R}{2}\left(\tilde{\rho}_{12}-\tilde{\rho}_{21}\right)=\frac{R^2\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)}{2\Gamma}\cdot\mathcal{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right), \text{ где}$$

$$\mathcal{L}(x)\equiv\frac{1}{1+x^2} \text{ — лоренцевский контур} \qquad =>$$

$$\begin{cases}\dot{\rho}_{11}+\gamma_1\rho_{11}=\gamma_1\rho_{11}^0-\dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)\cdot\mathcal{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right)\\ \dot{\rho}_{22}+\gamma_2\rho_{22}=\gamma_2\rho_{22}^0+\dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(\rho_{11}-\rho_{22}\right)\cdot\mathcal{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right)\end{cases}$$

Умножим систему на распределение концентрации по лучевой скорости $N_{0_{V_z}}$ и получим

$$\begin{cases}\dot{N}_{1_{V_z}}+\gamma_1 N_{1_{V_z}}=\gamma_1 N_{1_{V_z}}^0-\dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}\right)\cdot\mathcal{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right)\\ \dot{N}_{2_{V_z}}+\gamma_2 N_{2_{V_z}}=\gamma_2 N_{2_{V_z}}^0+\dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}}-N_{2_{V_z}}\right)\cdot\mathcal{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right)\end{cases} \qquad (5.2)$$

Это почти скоростные уравнения, осталось заменить величину R^2 на более традиционное выражение.

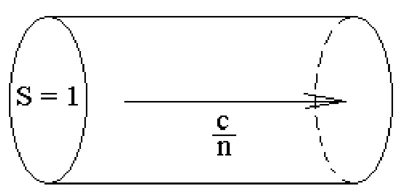
Для получения нового вида уравнений нам понадобятся две новые величины: J и σ.

Введем в рассмотрение J — плотность потока фотонов. Эта величина связана с интенсивностью света I, которая представляет собой плотность потока энергии светового поля. Тогда

$$J\equiv\frac{I}{h\nu},$$

где $I\equiv\left\langle\left|\vec{S}\right|\right\rangle$, где угловые скобки означают усреднение по времени, $\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\left[\vec{E},\vec{H}\right]$ — вектор Пойнтинга.

Рассмотрим цилиндр со световым полем, объемная плотность которого w, а фазовая скорость — $\frac{c}{n}$.



Пусть площадь сечения цилиндра равна единице, а длина — $\frac{c}{n}$. Тогда объем цилиндра равен их произведению $\frac{c}{n}$, а энергия светового поля в этом объеме равна $w\frac{c}{n}$. Вся эта энергия в единицу времени пройдет через единичную площадку. Следовательно,

$$I = \langle w \rangle \frac{c}{n}.$$

Объемную плотность энергии w можно выразить через амплитуду светового поля $\mathcal{E}_0$. И действительно

$$w = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\vec{D},\vec{E}\right)+\left(\vec{B},\vec{H}\right)\right\}.$$

В оптике $\mu = 1$ и $\sqrt{\mu}H = \sqrt{\varepsilon}E$ в бегущей световой волне, тогда

$$w = \frac{1}{8\pi}\left\{\left(\vec{D},\vec{E}\right)+\left(\vec{B},\vec{H}\right)\right\} = \frac{1}{8\pi}\left\{\varepsilon E^2 + \mu H^2\right\} = \frac{1}{4\pi}\varepsilon E^2 = \frac{n^2E^2}{4\pi}.$$

$$E = \mathcal{E}_0 \cos(\omega t) \quad => \quad \left\langle E^2 \right\rangle = \frac{\mathcal{E}_0^2}{2} \quad =>$$

$$\langle w \rangle = \frac{n^2\mathcal{E}_0^{\ 2}}{8\pi}.$$

Тогда

$$J = \frac{I}{h\nu} = \langle w \rangle \cdot \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{nc\mathcal{E}_0^{\ 2}}{8\pi\hbar\omega}.$$

Оказывается, что в этом выражении нужно заменить $n \to n_0$.

Такая странность имеет две причины.

Во-первых, часть энергии светового поля принято считать энергией, запасенной в среде. Дело в том, что $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P}$, где поляризация $\vec{P}$ имеет два слагаемых: резонансное $\vec{P}_{рез}$ и нерезонансное $\vec{P}_{нерез}$. Резонансный вклад связан с тем, что молекула может поглощать или излучать свет, только одновременно находясь на двух уровнях энергии. Следовательно, резонансный вклад в поляризацию неразрывно связан с частичным заселением возбужденного уровня энергии. По этой причине соответствующую энергию рассматривают, как энергию среды, а не как энергию светового поля. Тогда обозначим вектор электрического смещения без резонансного вклада в поляризацию, как

$\vec{D}_0 = \vec{E} + 4\pi\vec{P}_{нерез} = n_0^2\vec{E}$, что аналогично $\vec{D} = \vec{E} + 4\pi\vec{P} = \varepsilon\vec{E} = n^2\vec{E}$.

Соответственно объемная плотность энергии $\langle w_0 \rangle = \dfrac{n_0^2\mathcal{E}_0^{\ 2}}{8\pi}$.

Кроме того, рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы договорились рассматривать свет, как будто он распространяется со скоростью $\frac{c}{n_0}$, а не $\frac{c}{n}$.

В результате

$$J = \langle w_0 \rangle \cdot \frac{c}{n_0} \cdot \frac{1}{h\nu} = \frac{n_0 c \mathcal{E}_0^{\,2}}{8\pi\hbar\omega}.$$

Введем теперь в рассмотрение новую величину σ — сечение поглощения, которая по своему физическому смыслу должна быть равна площади тени молекулы. Через сечение поглощения σ может быть выражен коэффициент поглощения $\aleph$.

Коэффициент поглощения определяется зависимостью изменения интенсивности света по мере его распространения в поглощающей среде:

$$I(z) = I(0) \cdot e^{-\aleph z}$$

С учетом равенства $J \equiv \frac{I}{h\nu}$ получим

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-\aleph z}.$$

$(N_1 - N_2)$ — эффективная концентрация поглощающих свет молекул, так как при одинаковых заселенностях верхнего и нижнего уровней энергии число переходов снизу вверх равно числу вынужденных переходов сверху вниз, и поглощение света отсутствует.

$(N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$ — число этих как бы поглощающих свет молекул в объеме $S \cdot dz$.

$\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz$ — площадь тени этих молекул.

$\frac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S}$ — относительная площадь тени или вероятность поглощения фотона на длине dz.

$\left|\frac{dJ}{J}\right|$ — тоже вероятность поглощения для фотона на длине dz.

Тогда

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot S \cdot dz}{S} \qquad =>$$

$$\frac{dJ}{J} = -\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot dz \qquad =>$$

$$J(z) = J(0) \cdot e^{-\sigma \cdot (N_1 - N_2) \cdot z}.$$

Сравним это выражение с другим: $J(z) = J(0) \cdot e^{-\aleph z}$ и получим

$$\aleph = (N_1 - N_2) \cdot \sigma.$$

В случае неоднородного уширения спектральной линии $\Gamma << kU$ величины $\aleph, \sigma, N_1, N_2$ зависят от лучевой скорости V_z, так как частота света в системе от счета молекулы $\omega' = \omega - kV_z$ зависит от V_z.

Поглощение среды складывается из поглощения молекул с разными лучевыми скоростями

$$\aleph = \int_{-\infty}^{+\infty} \aleph_{V_z} dV_z .$$

Соотношение $\aleph = (N_1 - N_2) \cdot \sigma$ можно записать для молекул, лучевая скорость которых лежит в диапазоне от V_z до $V_z + dV_z$:

$$\aleph_{V_z} dV_z = \left(N_{1_{V_z}} dV_z - N_{2_{V_z}} dV_z \right) \cdot \sigma(V_z) \qquad =>$$

$$\aleph_{V_z} = \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}} \right) \cdot \sigma(V_z) \qquad =>$$

$$\sigma(V_z) = \frac{\aleph_{V_z}}{N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}} .$$

Рассматривая обратное воздействие среды на волну, мы получили, что поглощение среды пропорционально мнимой части комплексной восприимчивости среды $\aleph_{V_z} = \frac{4\pi\omega}{cn_0} \chi''_{V_z}$, тогда

$$\sigma(V_z) = \frac{\frac{4\pi\omega}{cn_0} \chi''_{V_z}}{N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}} .$$

Рассматривая влияние монохроматической световой волны на среду, мы получили выражение для мнимой части комплексной восприимчивости среды

$$\chi''_{V_z} = \frac{p^2 N_{0_{V_z}} \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) \right)}{\hbar} \cdot \frac{\Gamma}{\Gamma^2 + \Omega^2} = \frac{p^2 \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}} \right)}{\hbar\Gamma} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma} \right) \qquad =>$$

$$\frac{\chi''_{V_z}}{N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}} = \frac{p^2}{\hbar\Gamma} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma} \right).$$

Подставим это отношение в формулу для сечения поглощения $\sigma(V_z) = \frac{\frac{4\pi\omega}{cn_0} \chi''_{V_z}}{N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}}$ и получим

$$\sigma(V_z) = \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma} \right) \qquad =>$$

$$\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Здесь $\sigma_0 = \dfrac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma}$ — амплитуда сечения поглощения, $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты света в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего переходы.

Из формулы $\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right)$ следует, что форма линии поглощения каждой молекулы — лоренцевский контур с шириной 2Γ, где Γ — скорость затухания недиагонального элемента матрицы плотности, она же — скорость затухания поляризации среды.

Рассмотрим выражение

$$\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \sigma(V_z) \cdot J = \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \sigma_0 \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \cdot \frac{n_0 c \mathscr{E}_0^2}{8\pi\hbar\omega} =$$

$$= \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \frac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right) \cdot \frac{n_0 c \mathscr{E}_0^2}{8\pi\hbar\omega} = \frac{R^2}{2\Gamma} \cdot \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right).$$

Сравним это выражение с полученными ранее почти скоростными уравнениями

$$\begin{cases} \dot{N}_{1_{V_z}} + \gamma_1 N_{1_{V_z}} = \gamma_1 N_{1_{V_z}}^0 - \dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \\ \dot{N}_{2_{V_z}} + \gamma_2 N_{2_{V_z}} = \gamma_2 N_{2_{V_z}}^0 + \dfrac{R^2}{2\Gamma}\left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right) \end{cases}$$

и получим скоростные уравнения в окончательном виде:

$$\begin{cases} \dot{N}_{1_{V_z}} + \gamma_1 N_{1_{V_z}} = \gamma_1 N_{1_{V_z}}^0 - \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \sigma(V_z) \cdot J \\ \dot{N}_{2_{V_z}} + \gamma_2 N_{2_{V_z}} = \gamma_2 N_{2_{V_z}}^0 + \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}}\right) \cdot \sigma(V_z) \cdot J \end{cases}.$$

Здесь сечение поглощение σ зависит от лучевой скорости V_z в соответствии с формулой:

$\sigma(V_z) = \sigma_0 \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega}{\Gamma}\right)$, где $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ — расстройка частоты, а амплитуда сечения $\sigma_0 = \dfrac{4\pi\omega p^2}{\hbar c n_0 \Gamma}$.

Физический смысл скоростных уравнений.

Рассмотрим второе уравнение из системы скоростных уравнений, пренебрегая затуханием и накачкой, и на время забудем о зависимости рассматриваемых величин от лучевой скорости V_z. Тогда

$$\dot{N}_2 = \left(N_1 - N_2\right)\sigma J .$$

Здесь правую часть равенства можно преобразовать:

$$\dot{N}_2 = \left(N_1 - N_2\right)\sigma J = \aleph J = -\frac{dJ}{dz} \qquad =>$$

$$\dot{N}_2 = -\frac{dJ}{dz}.$$

Здесь $\dot{N}_2$ — число переходов с нижнего уровня на верхний уровень в единицу времени в единице объема,

$\left(-\dfrac{dJ}{dz}\right)$ — насколько в единицу времени на единице длины и единице площади влетает фотонов больше, чем вылетает.

Тогда скоростные уравнения отражают тот факт, что скорость потери фотонов равна скорости оптических переходов с нижнего уровня энергии на верхний уровень.

Скоростные уравнения — это условие баланса энергий или равенства числа поглощенных фотонов числу переходов снизу вверх.

По этой причине скоростные уравнения называются также уравнениями баланса.

Уравнения баланса энергий вполне очевидны, и их можно записать без привлечения дифференциальных уравнений для матрицы плотности.

Как же тогда могло оказаться, что балансные уравнения выполняются неточно, а являются результатом приближения $\dot{\tilde{\rho}}_{21} = 0$?

Скоростные уравнения действительно выполняются неточно. Дело в том, что кроме баланса энергий при выводе уравнений баланса была использована формула $\aleph = \left(N_1 - N_2\right)\sigma$, в которой подразумевается, что поглощение света пропорционально разности заселенностей, что на самом деле справедливо только в случае независящей от времени амплитуды светового поля.

В общем случае коэффициент поглощения пропорционален мнимой части комплексной восприимчивости среды

$\aleph \sim \chi''$,

а вот мнимая часть комплексной восприимчивости среды пропорциональна разности заселенностей $\chi'' \sim \left(N_1 - N_2\right)$ только в стационарном случае, когда амплитуда светового поля не зависит от времени.

Дело в том, что разность заселенностей не гарантирует наличия дипольного момента среды, который появляется под действием светового поля только с некоторым запаздыванием по времени. Пока нет дипольного момента, комплексная восприимчивость равна нулю, как коэффициент пропорциональности между нулевой поляризацией среды и световым полем. Поглощение света средой связано с интерференцией переизлученного молекулами света и света проходящего мимо молекул. Пока нет переизлученного света, нет и поглощения света.

Импульс предвестник.

Итак, при быстром включении светового поля диполи молекул раскачиваются не мгновенно, а в течение некоторого промежутка времени. Подробнее это явление мы рассмотрим в конце курса в вопросе "Оптические нутации".

В первый момент при включении света в среде нет осциллирующих молекулярных диполей, тогда нет и их излучения, нет изменения амплитуды проходящего света в результате интерференции проходящей волны и волны переизлученной диполями среды, нет даже показателя преломления среды, вызванного далекими крыльями дисперсионных контуров линий поглощения.

В результате в первый момент после быстрого включения света свет распространяется в среде без поглощения и со скоростью света в пустоте.

Рассмотрим слой среды, для которого $\aleph z \approx 200$. Тогда на выходе из среды интенсивность света составляет малую часть $e^{-\aleph z} \approx e^{-200}$ интенсивности света на входе в слой среды. Для сравнения число протонов в видимой части Вселенной — это величина порядка e^{200}. То есть ни одного фотона на выходе из среды не будет. Однако на опыте, если свет на входе в кювету включают быстро, то на выходе появляется короткий световой импульс — импульс предвестник, который проходит среду без поглощения и со скоростью света в пустоте. Ширина этого импульса примерно равна $\dfrac{1}{\aleph \cdot z \cdot \Delta\omega} \approx \dfrac{1}{200 \cdot \Delta\omega}$, где $\Delta\omega$ — спектральная ширина линии поглощения.

Два качественных описания взаимодействия света со средой.

Возможны два описания "на пальцах" взаимодействия света с веществом. Эти два описания нельзя смешивать друг с другом, иначе получатся заведомо ошибочные результаты.

Первый способ описания использует формализм матрицы плотности. В этом формализме свет поглощают все молекулы среды, и каждая молекула одновременно находится и на нижнем уровне энергии перехода и на верхнем уровне. В стационарном случае способность поглощать свет каждой молекулы пропорциональна разности заселенностей $(N_1 - N_2)$. Этот способ описания более правильный.

Второй способ описания в формализме скоростных уравнений. Этот способ менее точный, но более наглядный, более простой для понимания. Этот второй способ описания является хорошим приближением в стационарном случае, когда амплитуда световой волны не зависит от времени. В формализме скоростных уравнений одна часть молекул находится на нижнем уровне энергии, концентрация этих молекул равна заселенности нижнего уровня N_1, другая часть молекул находится на верхнем уровне энергии, и их концентрация N_2. При этом эффективная концентрация поглощающих молекул равна $N_1 - N_2$. Способность каждой молекулы поглощать свет не зависит от заселенностей уровней, а зависит только от расстройки частоты света относительно частоты перехода. Способность поглощать свет каждой молекулой пропорциональна сечению поглощения $\sigma = \sigma_0 \mathscr{L}\left(\frac{\Omega}{\Gamma}\right)$.

Если же перепутать оба формализма, то можно предположить, что способность поглощать свет каждой молекулой пропорциональна $N_1 - N_2$, и число поглощающих молекул пропорционально $N_1 - N_2$. Тогда получается, что поглощение света пропорционально $\left(N_1 - N_2\right)^2$, что неверно, так как на самом деле поглощение пропорционально $N_1 - N_2$.

Резонанс насыщения поглощения слабой пробной волны сильной встречной волной.

Резонанс насыщения поглощения иногда называют обращенным провалом Лэмба.

Рассмотрим явление качественно без формул.

Сильная световая волна перебрасывает молекулы с нижнего уровня на верхний и с верхнего на нижний. В результате переходов под действием света уменьшается разность заселенностей уровней:

$\left(N_1 - N_2\right) \searrow$.

Поглощение слабой встречной волны пропорционально этой разности заселенностей:

$\aleph \sim \left(N_1 - N_2\right)$, и, следовательно, поглощение убывает или, как говорят, насыщается.

Насыщается поглощение, так как сильная волна просветляет среду не только для слабой встречной волны, но и для самой себя. Поглощение уменьшается так, что интенсивность поглощенного света стремится к некоторой константе, при стремлении интенсивности падающей на среду световой волны к бесконечности.

Нас будет интересовать случай неоднородно уширенной линии поглощения, когда лоренцевская ширина линии поглощения каждой молекулы 2Γ гораздо меньше доплеровской ширины $2kU$ спектральной линии поглощения среды. То есть $\Gamma << kU$.

В случае неоднородного уширения спектральной линии насыщение поглощения сильной световой волны с частотой ω_1 наступает не для всех молекул, а только для тех, для которых сдвинутая эффектом Доплера частота света совпадает с частотой поглощающего перехода:

$\omega_1 - kV_{1z} = \omega_{21}$.

Как говорят, эти молекулы находятся в резонансе со световым полем.

Встречная световая волна с частотой ω_2 поглощается молекулами с лучевой скоростью V_{2z} такой, что

$\omega_2 + kV_{2z} = \omega_{21}$.

Доплеровский сдвиг частоты $+kV_{2z}$ имеет другой знак для встречной волны по сравнению со сдвигом для сильной волны $-kV_{1z}$.

Просветление среды сильной световой волной для слабой встречной волны происходит в том случае, когда обе волны поглощаются одним и тем же набором молекул:

$V_{1z} = V_{2z}$.

Тогда

$$\begin{cases} \omega_1 - kV_{1z} = \omega_{21} \\ \omega_2 + kV_{2z} = \omega_{21} \\ V_{1z} = V_{2z} \end{cases} \quad => \quad \begin{cases} \omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 + kV_z = \omega_{21} \end{cases} \quad => \quad \omega_{21} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}.$$

<u>Рассмотрим задачу количественно в приближении скоростных уравнений.</u>

Проведем рассмотрение в два этапа.

1). На первом этапе рассмотрим изменение среды под действием сильной световой волны.

2). На втором этапе рассмотрим уменьшение поглощения слабой волны средой измененной сильной волной.

Начнем рассмотрение со второй части.

Пусть $\aleph_2$ — коэффициент поглощения слабой световой волны.

$$\aleph_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \aleph_{2_{V_z}} dV_z = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(N_{1_{V_z}} - N_{2_{V_z}} \right) \cdot \sigma_2(V_z) \cdot dV_z =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} N_{0_{V_z}} \cdot \left(\rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) \right) \cdot \sigma_2(V_z) \cdot dV_z .$$

Подставим сюда

$$\begin{cases} N_{0_{V_z}} = \dfrac{N_0}{\sqrt{\pi} U} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \\ \rho_{11}(V_z) - \rho_{22}(V_z) = \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0 \right) \cdot \left(1 - \dfrac{G_1}{1 + G_1} \cdot \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega_1}{\Gamma \sqrt{1 + G_1}} \right) \right), \\ \sigma_2(V_z) = \sigma_0 \mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega_2}{\Gamma} \right) \end{cases}$$

где второе равенство является решением 1-го этапа задачи и описывает изменение среды сильной световой волной. Подставим и получим

$$\aleph_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \cdot \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right)\left(1 - \frac{G_1}{1+G_1} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma\sqrt{1+G_1}}\right)\right) \cdot \sigma_0 \mathscr{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right) \cdot dV_z \,.$$

Здесь Ω_1 — частотная расстройка первой световой волны в системе отсчета молекулы относительно частоты поглощающего перехода, Ω_2 — расстройка встречной слабой волны, G_1 — фактор насыщения или безразмерная мощность сильной световой волны.

$$\begin{cases} \Omega_1 = \omega_1 - kV_z - \omega_{21} \\ \Omega_2 = \omega_2 + kV_z - \omega_{21} \\ G_1 = \left(\dfrac{1}{\gamma_1} + \dfrac{1}{\gamma_2}\right) \cdot \dfrac{R_1^2}{2\Gamma} \\ R_1 = \dfrac{p\mathscr{E}_{01}}{\hbar} \end{cases}$$

Здесь R_1 — частота Раби для сильной световой волны.

В предельном случае неоднородного уширения спектральной линии $\Gamma << kU$ интеграл для коэффициента поглощения слабой волны $\aleph_2$ можно взять.

В выражении

$$\aleph_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \cdot \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right)\left(1 - \frac{G_1}{1+G_1} \cdot \mathscr{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma\sqrt{1+G_1}}\right)\right) \cdot \sigma_0 \mathscr{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right) \cdot dV_z$$

сомножитель $\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega_2}{\Gamma}\right)$ играет роль дельта-функции Дирака, так как при условии $\Gamma << kU$ оказывается, что лоренцевский контур $\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega_2}{\Gamma}\right)$ — это узкий пик, как функция от V_z.

В той области значений лучевой скорости, в которой $\mathscr{L}\left(\dfrac{\Omega_2}{\Gamma}\right)$ заметно отличается от нуля $\Omega_2 \approx 0$, другой сомножитель $e^{-\frac{V_z^2}{U^2}}$ можно считать почти постоянной величиной, которую можно вынести за знак интеграла.

$$\Omega_2 = 0 \quad => \quad \omega_2 + kV_z - \omega_{21} = 0 \quad => \quad V_z = \frac{\omega_{21} - \omega_2}{k} \quad =>$$

$$e^{-\frac{V_z^2}{U^2}} \approx e^{-\left(\frac{\omega_2 - \omega_{21}}{kU}\right)^2}$$

Тогда

$$\aleph_2 = \frac{N_0}{\sqrt{\pi}U} e^{-\left(\frac{\omega_2-\omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right) \cdot \sigma_0 \cdot \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(1 - \frac{G_1}{1+G_1} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_1}{\Gamma\sqrt{1+G_1}}\right)\right) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{\Omega_2}{\Gamma}\right) \cdot dV_z$$

Оставшийся интеграл можно разбить на два слагаемых:

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(x)dx = \pi$$

и

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(y-x) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx$$ — свертка двух лоренцевских контуров разной ширины.

В математике сверткой $(f \circ \varphi)$ двух функций f и φ называют следующий интеграл:

$$(f \circ \varphi)(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y-x) \cdot \varphi(x) \cdot dx .$$

Для вычисления свертки двух Лоренцев нужно подынтегральную функцию разложить на простые дроби:

$$\frac{1}{1+(x-y)^2} \cdot \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2} = \frac{A(x-y)+B}{1+(x-y)^2} + \frac{C\frac{x}{a}+D}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2},$$

где A, B, C, D — неизвестные функции от y и от a.

Каждый из 4-х получающихся интегралов при вычислении свертки двух Лоренцев можно взять. В результате получается

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(y-x) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx = \pi(B+aD) = \frac{\pi a}{1+a} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{y}{1+a}\right),$$

где B и D — функции от y и от a.

Свертка двух Лоренцев — это Лоренц суммарной ширины.

Подставим интегралы

$$\begin{cases} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(x)dx = \pi \\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{L}(y-x) \cdot \mathcal{L}\left(\frac{x}{a}\right) \cdot dx = \pi \frac{a}{1+a} \cdot \mathcal{L}\left(\frac{y}{1+a}\right) \end{cases}$$

в выражение для коэффициента поглощения пробной световой волны и получим

$$\aleph_2 = 4\pi^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{\omega_2 p^2 N_0 \left(\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0\right)}{c\hbar n_0 kU} \cdot e^{-\left(\frac{\omega_2-\omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot$$

$$\cdot\left(1 - \frac{G_1}{\left(1 + G_1 + \sqrt{1+G_1}\right)} \cdot \frac{\left(1+\sqrt{1+G_1}\right)^2 \Gamma^2}{\left(\omega_1 + \omega_2 - 2\omega_{21}\right)^2 + \left(1+\sqrt{1+G_1}\right)^2 \Gamma^2}\right).$$

Здесь ω_1 — частота сильной световой волны, ω_2 — частота слабой встречной световой волны, $G_1 = \left(\frac{1}{\gamma_1} + \frac{1}{\gamma_2}\right) \cdot \frac{R_1^2}{2\Gamma}$ — фактор насыщения или безразмерная мощность сильной световой волны, $R_1 = \frac{p\mathcal{E}_{01}}{\hbar}$ — частота Раби для сильной световой волны.

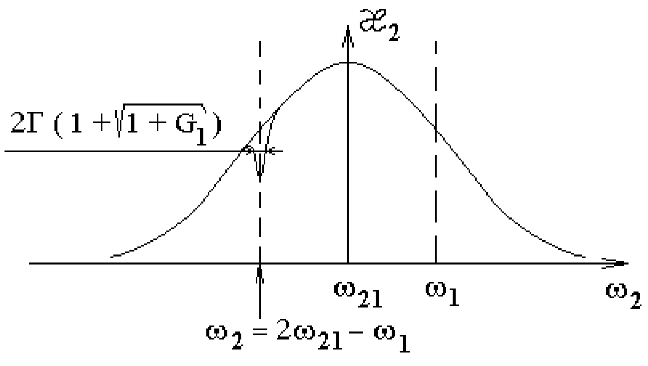
Резонанс просветления среды — это отрицательная добавка к коэффициенту поглощения световой волны.

Ширина резонанса при изменении ω_1 и постоянном значении ω_2 или при изменении ω_2 и постоянном значении ω_1 равна:

$$\Delta\omega = 2\Gamma\left(1 + \sqrt{1+G_1}\right).$$

Ширина резонанса просветления среды равна сумме ширины провала Беннетта в шкале частот, который выжигает сильная световая волна, и ширины сечения поглощения слабой встречной волны. Контур суммарной ширины получается в результате свертки Лоренцев провала Беннетта и сечения поглощения.

Резонанс насыщения поглощения возникает при условии $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$.



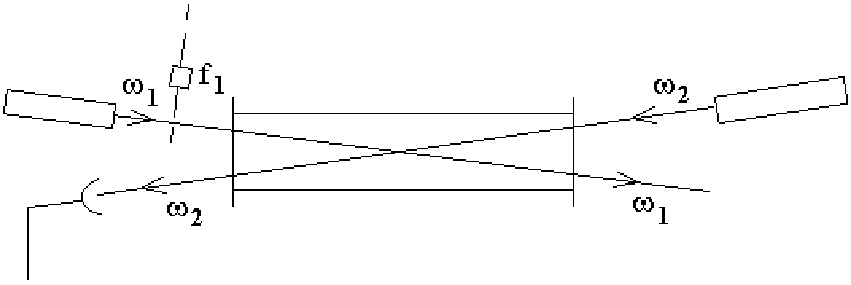
Еще раз коротко о механизме формирования резонанса насыщения поглощения. Сильная волна перебрасывает молекулы с одного уровня энергии на другой, уменьшая, таким образом, разность заселенностей $\left(N_1 - N_2\right)$. Поглощение слабой волны пропорционально этой разности $\aleph \sim \left(N_1 - N_2\right)$. Просветление среды происходит в том случае, когда две встречных волны поглощаются одним и тем же набором молекул с лучевой скоростью V_z:

$$\begin{cases}\omega_1 - kV_z = \omega_{21} \\ \omega_2 + kV_z = \omega_{21}\end{cases} \quad => \quad \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}.$$

<u>Варианты спектроскопии насыщения поглощения.</u>

<u>1). Встречные волны разной частоты.</u>

Оптическая схема опыта представлена на следующем рисунке:



.

Подразумевается, что угол между встречными волнами очень мал.

Прерыватель, он же модулятор, представляет собой вращающийся диск с прорезями, через которые проходит излучение лазера 1.

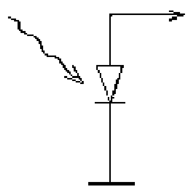
Фототок приемника излучения слабой волны с частотой ω_2 модулирован на частоте f_1 прерываний света сильной волны ω_1 только в том случае, если две световые волны нелинейно взаимодействуют в среде кюветы. Фототок модулирован на частоте f_1, если при включении луча ω_1 изменяется поглощение луча ω_2.

Обсудим теперь некоторые технические детали эксперимента.

В качестве приемника излучения света используется фотодиод, фоторезистор или ФЭУ — фотоэлектронный умножитель.

Чаще всего используется фотодиод, поэтому рассмотрим три варианта включения фотодиода в электрическую схему.

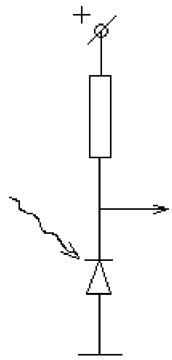
1). Режим фото ЭДС



При указанной полярности включения фотодиода под действием света на выходе образуется положительное напряжение $U_{вых} > 0$.

Преимущество схемы — малые шумы. Недостаток — нелинейная зависимость напряжения на выходе от интенсивности света.

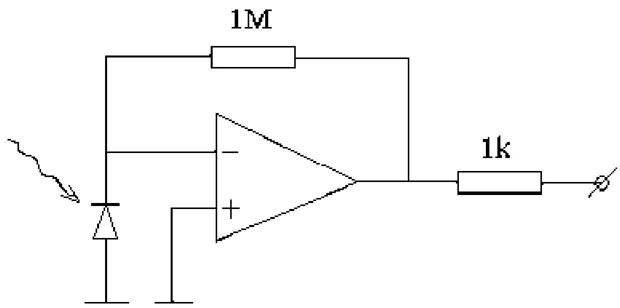
2). Режим включения с внешним источником напряжения.



Напряжение на выходе схемы линейно минусеет с ростом интенсивности света.

Преимущество схемы — линейность и большая чувствительность (высокий коэффициент передачи). Недостаток схемы — большие шумы.

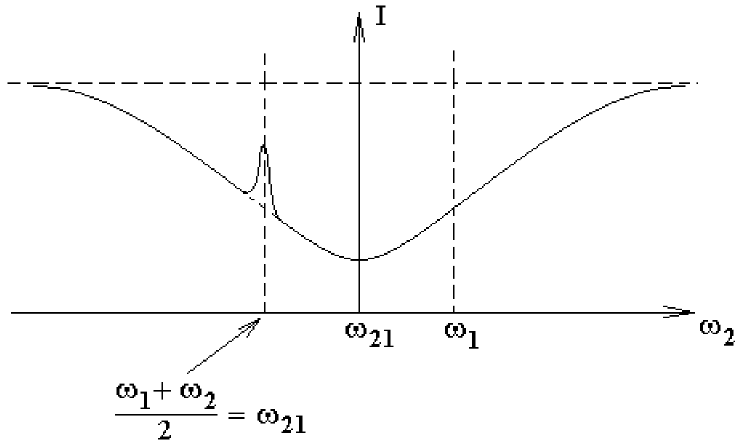
3). Режим короткого замыкания.



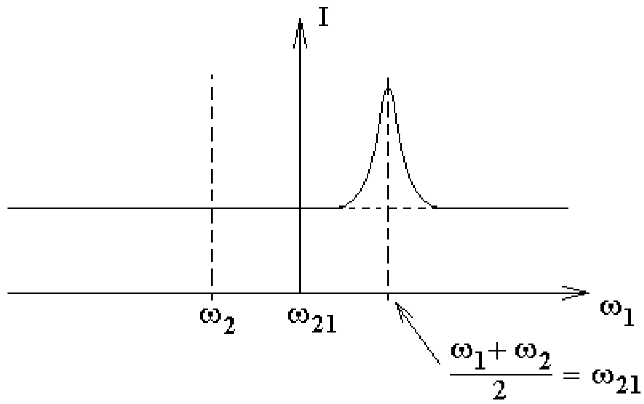
Преимущества схемы — высокая линейность, малые шумы, высокий коэффициент передачи. При указанной полярности включения фотодиода под действием света на выходе операционного усилителя образуется положительное напряжение $U_{вых} > 0$.

Рассмотрим зависимость интенсивности света на приемнике от частоты сильной волны ω_1 и от частоты слабой встречной волны ω_2 для начала без модуляции на частоте f_1 лазерного луча сильной волны ω_1.

Пусть частота пробной волны ω_2 медленно изменяется. Тогда зависимость интенсивности света на приемнике от времени и, соответственно, от частоты ω_2 будет иметь вид широкого доплеровского контура линии поглощения (подразумевается, что $\Gamma << kU$) и узкого лоренцевского пика просветления среды на частоте, для которой выполняется условие $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$.

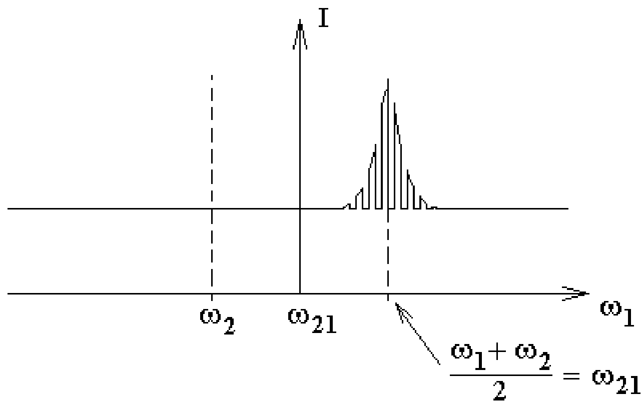


Теперь рассмотрим вариант регистрации резонанса, если частота пробной волны фиксирована $\omega_2 = const$. Тогда при изменении частоты насыщающей волны ω_1 интенсивность света на приемнике не изменяется до тех пор, пока не будет выполнено условие $\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} = \omega_{21}$, при котором обе встречные волны поглощаются одним и тем же набором молекул:



Здесь изображен более широкий резонанс только для большей наглядности следующего рисунка.

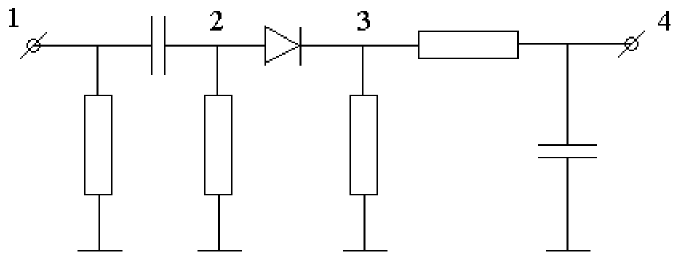
Если в этом втором варианте регистрации включить модуляцию сильной световой волны, то при линейном сканировании во времени частоты ω_1 сильной волны зависимость интенсивности на приемнике от времени будет иметь следующий вид:



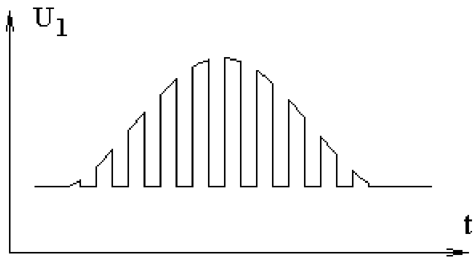
Обычно резонанс просветления среды очень мал и составляет один процент или еще меньше от величины постоянной подложки — засветки приемника. При этом даже незначительные шумы подложки существенно затрудняют регистрацию резонанса. Как говорят, резонанс тонет в шумах. В таком случае возникает задача выделения огибающей резонанса и исключения подложки из электрического сигнала фотоприемника.

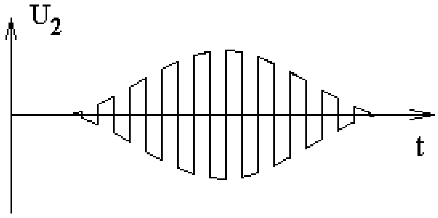
Рассмотрим два способа выделения огибающей фототока.

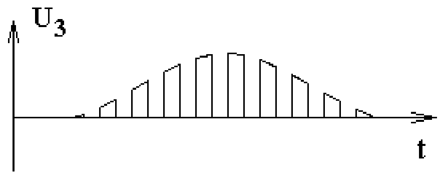
1-ый способ.

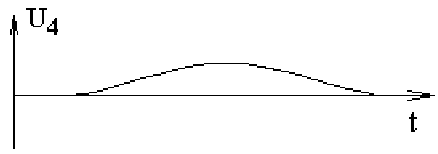


Рассмотрим напряжение, как функцию времени (при линейном сканировании частоты любого из лазеров) в четырех точках, указанных на рисунке. Обозначим эти напряжения, как U_1, U_2, U_3, U_4.






U3
t


U4
t