

## Динамический Штарк-эффект или эффект Штарка в поле световой волны (одетый атом).

Динамический эффект Штарка состоит в том, что уровни энергии атома или молекулы расщепляются и сдвигаются в световом поле. Проявляется расщепление уровней в том, что атом, находясь в сильном световом поле, имеет для еще одного пробного светового поля три линии поглощения вместо одной.

Атом находится в двух световых полях в общем случае разной частоты. При этом два световых поля складываются то синфазно, то противофазно. В результате атом оказывается в световом поле, амплитуда которого испытывает биения на разностной частоте двух полей. То есть, атом находится в нестационарном световом поле.

Покажем, что атом в нестационарном световом поле имеет три линии поглощения вместо одной линии.

Проведем рассмотрение с помощью вектора Блоха.

Две первых компоненты вектора Блоха связаны с поляризацией среды:

$$P_{V_z} = pN_{0V_z} (u(V_z) \cdot \cos(\varphi) - v(V_z) \cdot \sin(\varphi)), \quad \text{где}$$

$\varphi = \omega't + \varphi_0 = (\omega - kV_z)t + \varphi_0$  — фаза световой волны в системе отсчета молекулы (вообще то, фаза — скаляр по группе Лоренца).

Рассмотрим вектор Блоха без затухания и накачки:  $\dot{\vec{B}} = [-\vec{R}_\Omega, \vec{B}]$ . Вектор

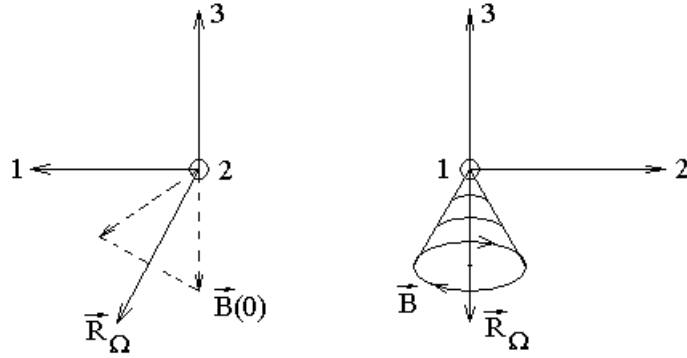
Блоха  $\vec{B}$  вращается вокруг вектора  $(-\vec{R}_\Omega)$ , где  $\vec{R}_\Omega = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$ .

Тогда первые две компоненты  $u$  и  $v$  вектора Блоха  $\vec{B}$ , входящие в выражение для поляризации  $P_{V_z}$ , осциллируют с частотой  $R_\Omega = \sqrt{R^2 + \Omega^2}$ .

Рассмотрим вращение вектора Блоха для атомов, которые в начальный момент времени находятся на нижнем уровне энергии. Тогда в нулевой момент времени вероятность обнаружить атом на нижнем уровне энергии равна единице  $\rho_{11}(0) = 1$ , и вектор Блоха в нулевой момент времени направлен

вертикально вниз  $\vec{B}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

Вращение вектора Блоха вокруг вектора  $\vec{R}_\Omega$  в левую сторону изображено на нижеследующем рисунке для случая  $\Omega < 0$ :



Из рисунка видно, что

$$\begin{cases} u = u_0 - u_0 \cdot \cos(R_\Omega t) \\ v = -v_0 \cdot \sin(R_\Omega t) \end{cases}$$

Подставим  $u$  и  $v$  в уравнение  $P_{V_z} = pN_{0V_z} (u(V_z) \cdot \cos(\varphi) - v(V_z) \cdot \sin(\varphi))$

и получим:

$$\begin{aligned} P_{V_z} &= pN_{0V_z} \left( (u_0 - u_0 \cos(R_\Omega t)) \cdot \cos(\omega' t) + v_0 \sin(R_\Omega t) \cdot \sin(\omega' t) \right) = \\ &= pN_{0V_z} \left( u_0 \cos(\omega' t) - \frac{u_0}{2} \cos((\omega' + R_\Omega)t) - \frac{u_0}{2} \cos((\omega' - R_\Omega)t) \right) + \\ &+ pN_{0V_z} \left( \frac{v_0}{2} \cos((\omega' - R_\Omega)t) - \frac{v_0}{2} \cos((\omega' + R_\Omega)t) \right) = \\ &= pN_{0V_z} u_0 \cos(\omega' t) - pN_{0V_z} \frac{u_0 + v_0}{2} \cos((\omega' + R_\Omega)t) + pN_{0V_z} \frac{v_0 - u_0}{2} \cos((\omega' - R_\Omega)t) \end{aligned}$$

Следовательно, поляризация  $P_{V_z}$  состоит из трех слагаемых, которые осциллируют на частотах  $\omega'$ ,  $\omega' + R_\Omega$  и  $\omega' - R_\Omega$ . Здесь  $\omega' = \omega - kV_z$  — частота света в системе отсчета атома.

Поляризация — это объемная плотность дипольного момента. Осциллирующие диполи среды излучают свет на тех же трех частотах.

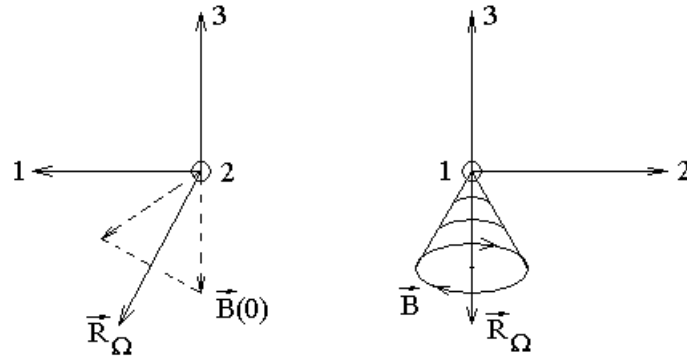
Пусть через такую среду проходит еще одна пробная световая волна. Если частота пробной волны совпадает с одной из трех частот излучения диполей среды, то волна излученная диполями интерферирует с пробной волной.

В результате интерференции изменяется амплитуда пробной волны. То есть пробная волна поглощается или усиливается средой.

Следовательно, среда имеет три линии поглощения для пробной световой волны с частотами  $\omega'$ ,  $\omega' + R_\Omega$  и  $\omega' - R_\Omega$ . В этом и состоит динамический эффект Штарка.

Рассуждения проведены для случая  $\Omega < 0$ , когда получаем  $u_0 > 0$  и  $v_0 > 0$ . Если  $\Omega > 0$ , то  $u_0 < 0$ , но  $v_0 > 0$ .

Чтобы знать амплитуды трех компонент нужно найти величины  $u_0$  и  $v_0$ .

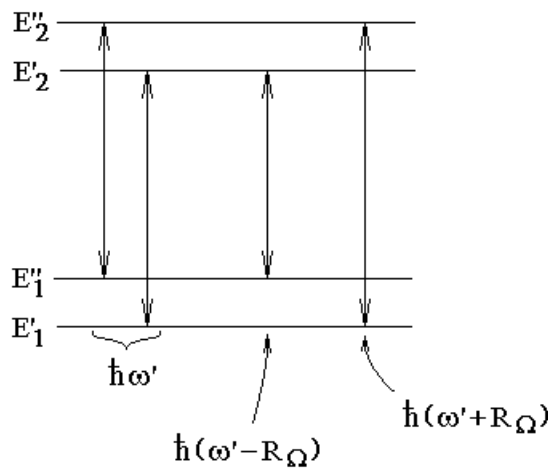


Из рисунка при  $\Omega < 0$  видно, что

$$\begin{cases} u = u_0 - u_0 \cdot \cos(R_\Omega t) \\ v = -v_0 \cdot \sin(R_\Omega t) \end{cases}$$

$$P_{V_z} = pN_{0V_z} u_0 \cos(\omega' t) - pN_{0V_z} \frac{u_0 + v_0}{2} \cos((\omega' + R_\Omega)t) + pN_{0V_z} \frac{v_0 - u_0}{2} \cos((\omega' - R_\Omega)t)$$

Для описания трех линий поглощения нужно не менее 4-х уровней энергии. Схема уровней энергии приведена ниже на рисунке.



Чтобы линий поглощения было только три необходимо, чтобы расщепление двух верхних подуровней энергии было бы равно расщеплению двух нижних подуровней.

Из рисунка видно, что энергии уровней связаны с частотами переходов следующими соотношениями:

$$\begin{cases} E_2'' - E_1'' = \hbar \omega' \\ E_2' - E_1'' = \hbar(\omega' - R_\Omega) \\ E_2'' - E_1' = \hbar(\omega' + R_\Omega) \end{cases}$$

Уравнение для четвертого возможного перехода не является линейно независимым по отношению к трем предыдущим уравнениям.

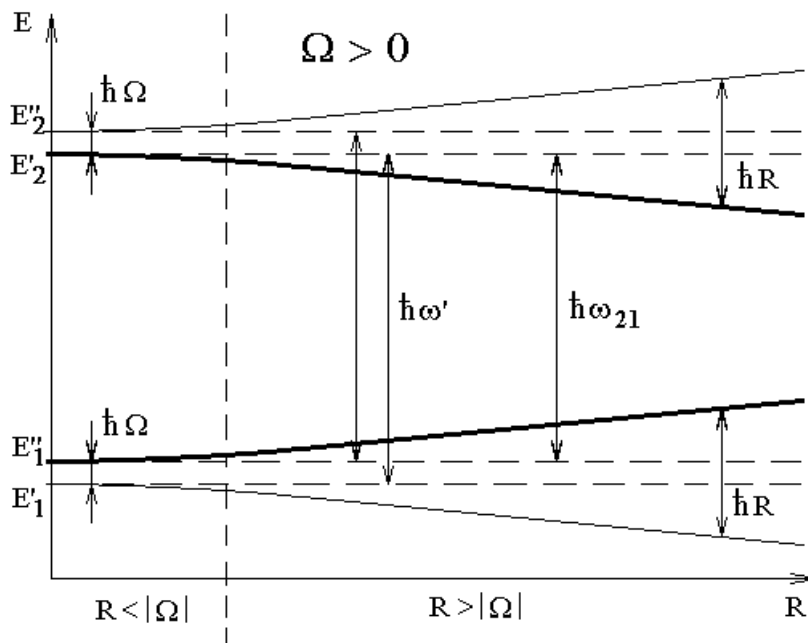
В качестве четвертого уравнения для 4-х неизвестных энергий потребуем из симметрии задачи сохранения центра тяжести 4-х уровней энергии:

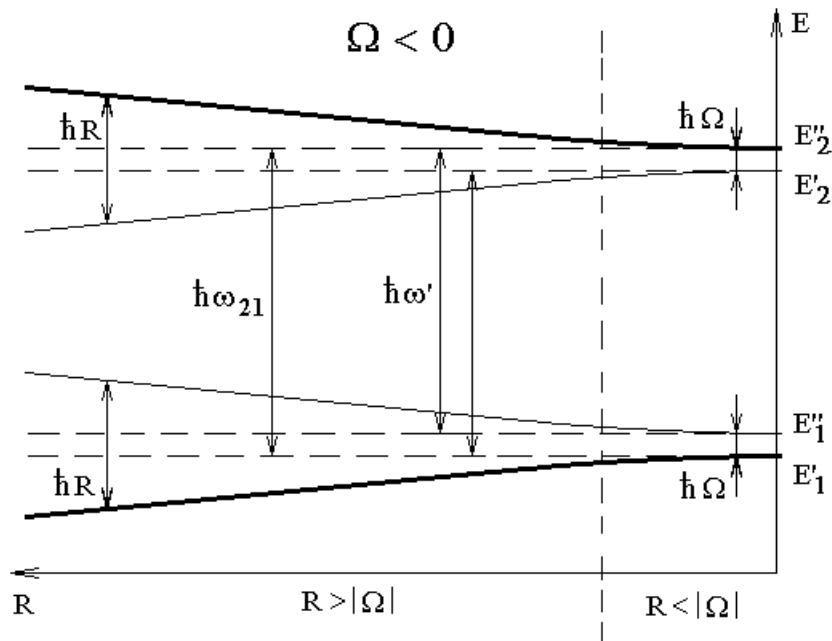
$$\frac{E_1' + E_1'' + E_2' + E_2''}{4} = \frac{E_1 + E_2}{2}.$$

Решаем систему из 4-х уравнений и получаем энергии уровней:

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1' = E_1 - \frac{\hbar\Omega}{2} - \frac{\hbar R_\Omega}{2} \\ E_1'' = E_1 - \frac{\hbar\Omega}{2} + \frac{\hbar R_\Omega}{2} \\ E_2' = E_2 + \frac{\hbar\Omega}{2} - \frac{\hbar R_\Omega}{2} \\ E_2'' = E_2 + \frac{\hbar\Omega}{2} + \frac{\hbar R_\Omega}{2} \end{array} \right., \text{ где } \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} = \omega' - \omega_{21} \\ R_\Omega = \sqrt{R^2 + \Omega^2} \\ R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar} \end{array} \right.$$

Поведение уровней энергии в зависимости от частоты Раби  $R$ , которая пропорциональна амплитуде светового поля  $\mathcal{E}_0$ , приведено на нижеследующих рисунках.





Верхний рисунок относится к случаю положительной расстройки частоты света относительно частоты перехода  $\Omega > 0$ , а нижний рисунок — к случаю отрицательной расстройки  $\Omega < 0$ . Жирными линиями показаны исходные уровни энергии, которые были и без светового поля.

Рассмотрим подробнее верхний рисунок, где  $\Omega = \omega' - \omega_{21} > 0$ .

Левая область графиков верхнего рисунка  $R < |\Omega|$  — это область слабого поля или нерезонансная область.

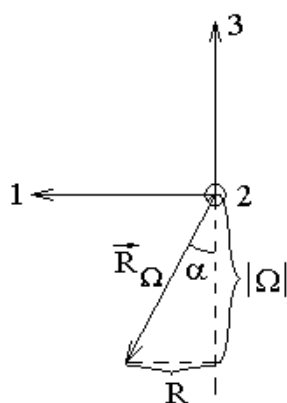
Правая область графиков  $R > |\Omega|$  верхнего рисунка — это область сильного поля или резонансная область.

Заметим, что исходные уровни энергии  $E'_1$  и  $E'_2$  в случае  $\Omega > 0$  приближаются друг к другу при увеличении светового поля. Если же  $\Omega < 0$ , то исходными уровнями будут уровни  $E'_1$  и  $E''_2$ , и они будут удаляться друг от друга с увеличением поля световой волны. То есть концы вертикальной стрелки энергии светового поля отталкивают от себя уровни энергии перехода. Если вертикальная стрелка светового поля длиннее перехода между уровнями, то уровни сближаются, если короче — разбегаются.

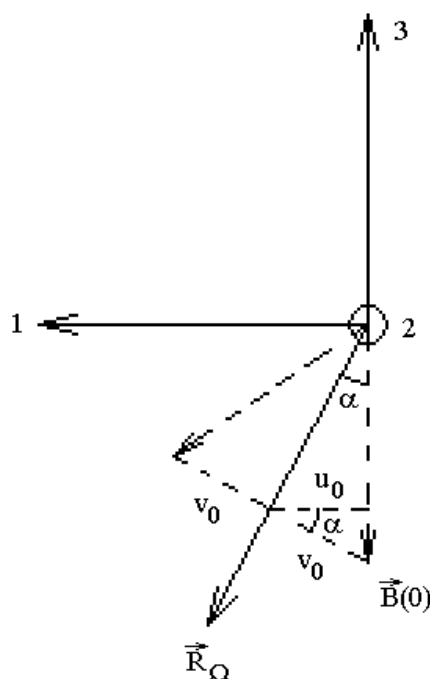
-----  
Обсудим теперь правила отбора.

Обозначим угловой радиус при вершине конуса за  $\alpha$ , тогда  $\operatorname{tg}(\alpha) = \left| \frac{R}{\Omega} \right|$ ,

как это видно из нижеследующего рисунка.



Радиус в основании конуса равен  $v_0$ .



$$v_0 = B(0) \cdot \sin(\alpha) = \sin(\alpha) = \operatorname{tg}(\alpha) \cdot \cos(\alpha) = \frac{\operatorname{tg}(\alpha)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}} = \frac{\frac{R}{|\Omega|}}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}},$$

где  $u_0 = v_0 \cos(\alpha)$ , что видно из рисунка.

$$\text{Тогда } u_0 = v_0 \cos(\alpha) = v_0 \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(\alpha)}} = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}}} = -\frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2}.$$

Здесь минус появляется, так как на рисунке  $\Omega < 0$ , а величина  $u_0 > 0$ .  
Формулы справедливы и при условии  $\Omega > 0$ . В дальнейшем удобнее будет считать, что  $\Omega > 0$ .

Напомним, что поляризация содержит колебания на трех частотах:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{V_z} = pN_{0_{V_z}} u_0 \cos(\omega' t) - pN_{0_{V_z}} \frac{u_0 + v_0}{2} \cos((\omega' + R_\Omega)t) + pN_{0_{V_z}} \frac{v_0 - u_0}{2} \cos((\omega' - R_\Omega)t) \\ u_0 = -\frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2} \\ v_0 = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}} \end{array} \right.$$

Тогда амплитуды на частотах  $\left\{ \begin{array}{l} \omega' \\ \omega' + R_\Omega \\ \omega' - R_\Omega \end{array} \right.$  пропорциональны величинам

$$\left\{ \begin{array}{l} u_0 \\ \frac{u_0 + v_0}{2} \\ \frac{v_0 - u_0}{2} \end{array} \right. \text{ или пропорциональны } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2} \\ \frac{1}{2} \frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2} - \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}} \\ \frac{1}{2} \frac{R\Omega}{R^2 + \Omega^2} + \frac{1}{2} \frac{R}{\sqrt{R^2 + \Omega^2}} \end{array} \right.$$

Чтобы было удобнее проводить анализ формул, введем безразмерную амплитуду светового поля  $\xi \equiv \frac{R}{\Omega}$  или частоту Раби, отнесенную к частотной расстройке светового поля  $\Omega = \omega' - \omega_{21}$ , и для определенности будем считать, что  $\Omega > 0$ . Тогда амплитуды поляризации на трех частотах пропорциональны величинам:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\xi}{1 + \xi^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\xi}{1 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{|\xi|}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\ \frac{1}{2} \frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{|\xi|}{\sqrt{1 + \xi^2}} \end{array} \right.$$

Чтобы избавиться от модулей перейдем к рассмотрению трех частот другом в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega' \\ \omega' + \Omega \sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}} \\ \omega' - \Omega \sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}} \end{array} \right. \text{ с амплитудами поляризации } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\xi}{1 + \xi^2} \\ \frac{1}{2} \frac{\xi}{1 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\ \frac{1}{2} \frac{\xi}{1 + \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{\xi}{\sqrt{1 + \xi^2}} \end{array} \right. \text{ на этих}$$

частотах.

-----

Рассмотрим, что происходит в слабом световом поле при  $\xi \rightarrow 0$ .

В этом случае все три амплитуды стремятся к нулю. Разделим все три амплитуды на безразмерную амплитуду поля  $\xi$  и получим коэффициенты пропорциональные амплитудам колебаний поляризации, но такие, что некоторые коэффициенты при этом не будут стремиться к нулю при  $\xi \rightarrow 0$ .

$$\text{Коэффициенты будут равны } \left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{1 + \xi^2} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \xi^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \\ \frac{1}{2} \frac{1}{1 + \xi^2} + \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \xi^2}} \end{array} \right. \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} \left\{ \begin{array}{l} -1 \\ 0 \\ +1 \end{array} \right. .$$

То есть правила отбора оставляют разрешенными только две крайние частоты.

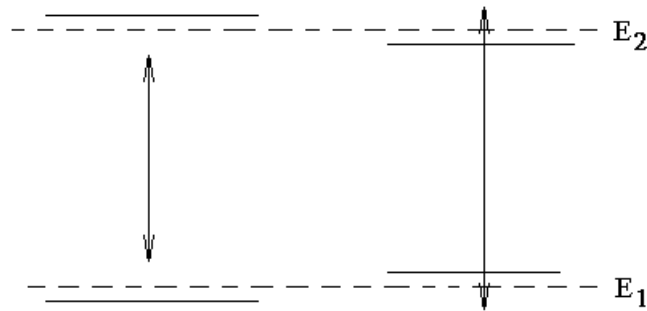
$$\left\{ \begin{array}{l} \omega' \\ \omega' + \Omega \sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}} \approx \omega' + \Omega \\ \omega' - \Omega \sqrt{1 + \frac{R^2}{\Omega^2}} \approx \omega' - \Omega \approx \omega_{21} \end{array} \right.$$

при  $\xi \rightarrow 0$ . Разрешенные частоты  $\omega'$  и  $\omega_{21}$ , где  $\omega' = \omega_{21} + \Omega$ .

В относительно слабом световом поле для второй пробной световой волны разрешены переходы на частоте первого светового поля  $\omega'$  и на частоте перехода  $\omega_{21}$ . Переходы на частоте  $\omega'$  удобнее рассматривать, не как переходы между новыми уровнями энергии, а как нелинейность взаимодействия со средой одного светового поля на частоте  $\omega'$  вместо двух световых полей.



То есть в относительно слабом световом поле можно считать, что новых уровней энергии не возникает, а старые уровни сдвигаются, как бы отталкиваясь от вертикальной стрелки с длиной равной энергии кванта света.



Рассмотрим теперь, правила отбора в сильном световом поле при  $\xi \rightarrow \infty$ .

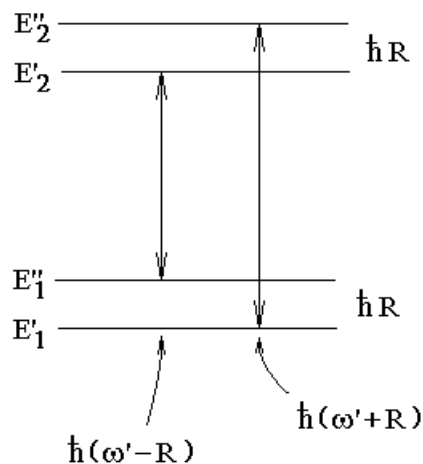
В этом случае нет необходимости делить амплитуды на  $\xi$ , так как некоторые из них и так стремятся к ненулевой константе.

Амплитуды на частотах  $\begin{cases} \omega' + R_\Omega \\ \omega' - R_\Omega \end{cases}$  стремятся к величинам  $\begin{cases} -\frac{1}{2} \\ +\frac{1}{2} \end{cases}$ , амплитуда

на частоте  $\omega'$  стремится к нулю.

В сильном световом поле  $R_\Omega \approx R$ .

В сильном световом поле для пробной световой волны разрешены переходы с частотами  $\omega' + R$  и  $\omega' - R$ , где  $\omega'$  — частота первого светового поля. Разрешенные в сильном световом поле переходы указаны на следующем рисунке:



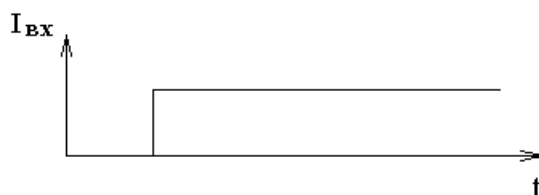
### Оптические нутации.

Рассмотрим оптическую схему:



Рассмотрим интенсивность света на выходе кюветы при быстром включении светового поля на входе в кювету.

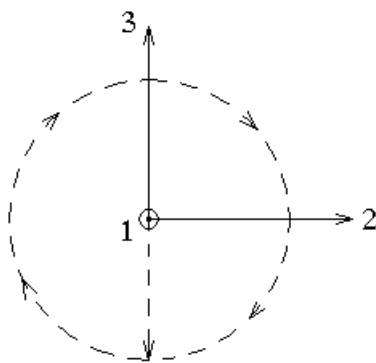
Пусть зависимость интенсивности света на входе в кювету имеет следующий вид:



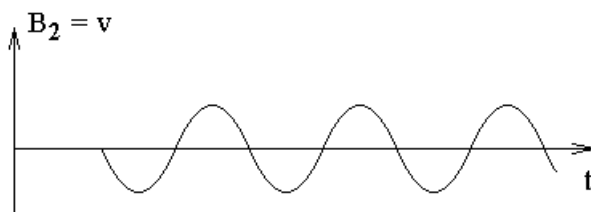
Как при этом выглядит зависимость интенсивности на выходе из кюветы, как функция времени?

Рассмотрим сначала частный случай без затухания и накачки и с нулевой расстройкой частоты светового поля относительно частоты перехода  $\Omega = 0$ .

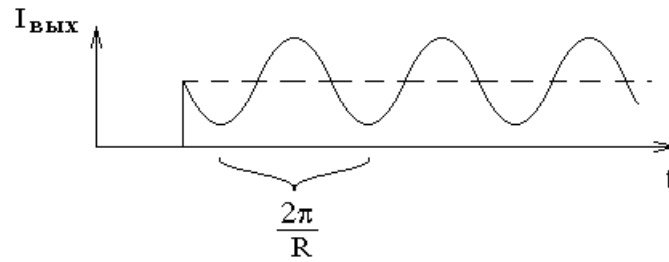
Вектор Блоха вращается вокруг вектора  $\vec{R}_\Omega = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ :



Такому вращению соответствует следующая зависимость второй координаты вектора Блоха от времени:

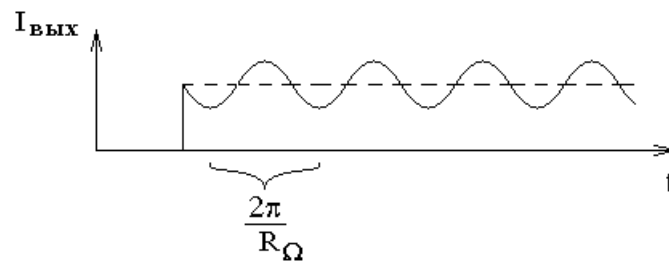


Эта координата отвечает за усиление света средой. Соответственно зависимость интенсивности на выходе из кюветы, как функция времени примет следующий вид:



Угловая скорость вращения вектора Блоха и циклическая частота колебаний усиления среды равна  $R$ . Тогда период колебаний интенсивности света на выходе из кюветы равен  $\frac{2\pi}{R}$ .

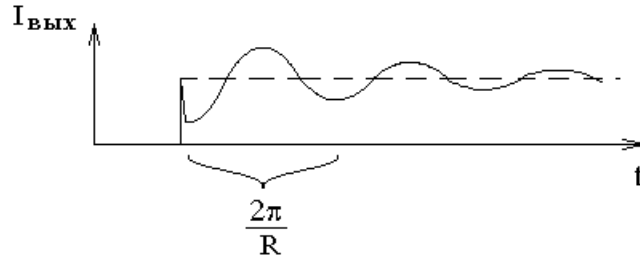
В случае ненулевой расстройки частоты света относительно частоты перехода  $\Omega \neq 0$ , как это уже обсуждалось ранее, амплитуда колебаний усиления среды становится меньше, а частота  $R_{\Omega} = \sqrt{R^2 + \Omega^2}$  — больше. Тогда зависимость интенсивности света на выходе из кюветы примет следующий вид:



В случае доплеровского уширения спектральной линии  $kU \gg \Gamma$  расстройка  $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$  зависит от лучевой скорости молекул  $V_z$ . Синусоиды зависимости усиления света от времени при различных расстройках  $\Omega$  имеют разную частоту  $R_{\Omega}$  и поэтому быстро расходятся по фазам. Усиление света всей средой представляет собой сумму синусоид с весовыми множителями равными распределению молекул по лучевой скорости. Сумма синусоид — гармоническая функция, затухающая во времени в результате расфазировки отдельных синусоид.

В зависимости от соотношения доплеровской ширины спектральной линии  $2kU$  и частоты Раби  $R$  время расфазировки  $\tau$  синусоид усиления различается. Время расфазировки  $\tau = \frac{1}{R}$  при условии  $R \ll kU$ , и  $\tau = \frac{1}{kU}$  при условии  $kU \ll R$ .

Зависимость интенсивности света на выходе из кюветы от времени в случае  $R \ll kU$  имеет следующий вид:



Название эффекта — оптические нутации связано с аналогией с нутациями гироскопа. Ассоциация вызвана тем, что первоначально определение первых двух компонент  $u$  и  $v$  вектора Блоха несколько отличалось. Определением было равенство  $2\rho_{21} = u - iv$  вместо более позднего определения  $2\tilde{\rho}_{21} = u - iv$ . Величины  $\rho_{21}$  и  $\tilde{\rho}_{21}$  связаны соотношением  $\rho_{21} = \tilde{\rho}_{21}e^{-i\omega't}$ . Тогда при первоначальном определении вектора Блоха кроме рассмотренного нами вращения вектора Блоха  $(-\vec{R}_\Omega)$  происходит быстрое его вращение вокруг оси 3 с частотой  $\omega'$ .

Тогда вращение  $(-\vec{R}_\Omega)$  выглядит, как медленные колебания на фоне быстрого вращения  $\omega'$  вокруг вертикальной оси. Эти медленные колебания похожи на нутации гироскопа. Отсюда и название явления.

#### Количественное описание оптических нутаций.

Чтобы найти зависимость интенсивности света на выходе кюветы, как функцию времени, нужно сначала найти усиление среды, которое пропорционально второй компоненте вектора Блоха. Чтобы найти вторую компоненту решим уравнения для вектора Блоха:

$$\dot{\vec{B}} + \gamma\vec{B} = [\vec{B}, \vec{R}_\Omega] + \vec{W}^0.$$

Здесь  $\vec{R}_\Omega = \begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix}$  — вектор, вокруг которого в левую сторону вращается

вектор Блоха;  $\vec{W}^0 \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma w^0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma_2 \rho_{22}^0 - \gamma_1 \rho_{11}^0 \end{pmatrix}$  — накачка ( $\gamma_1 = \gamma_2$ );

$\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$  — расстройка частоты светового поля в системе отсчета молекулы относительно частоты перехода,  $R = \frac{p\varepsilon_0}{\hbar}$  — частота Раби,  $\varepsilon_0$  — амплитуда светового поля,  $p = \int \psi_1^*(\vec{p}, \vec{e})\psi_2 d\vec{r}$  — недиагональный матричный элемент проекции дипольного момента перехода на единичный вектор поляризации световой волны.

До включения светового поля решение уравнения для вектора Блоха имеет вид:

$$\vec{B}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0 \end{pmatrix}.$$

После включения светового поля в соответствии с рассмотренными ранее возможными решениями уравнений Блоха ищем решение в виде:

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_{стац} + \vec{A}(t) \cdot e^{-\gamma t}, \text{ где вектор } \vec{B}_{стац} \text{ — решение уравнения}$$

$\gamma \vec{B}_{стац} = [\vec{B}_{стац}, \vec{R}_\Omega] + \vec{W}^0$ , вектор  $\vec{A}(t)$  — решение уравнения  $\dot{\vec{A}} = [\vec{A}, \vec{R}_\Omega]$ , вектор  $\vec{A}(t)$  вращается вокруг вектора  $\vec{R}_\Omega$  в левую сторону.

Сначала решим систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\gamma \vec{B}_{стац} = [\vec{B}_{стац}, \vec{R}_\Omega] + \vec{W}^0 \text{ и получим}$$

$$\begin{cases} u_{стац} = \frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ v_{стац} = \frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ w_{стац} = \frac{(\gamma^2 + \Omega^2) w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{cases}.$$

Теперь решим дифференциальное уравнение  $\dot{\vec{A}} = [\vec{A}, \vec{R}_\Omega]$  с начальным условием для нулевого момента времени в виде:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{стац} \\ v_{стац} \\ w_{стац} \end{pmatrix} + \vec{A}(0) \cdot e^{-\gamma \cdot 0} \quad \Rightarrow$$

$$\vec{A}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ -\frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ \frac{R^2 w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}.$$

Система уравнений  $\dot{\vec{A}} = [\vec{A}, \vec{R}_\Omega]$  или 
$$\begin{cases} \dot{A}_1 = A_2\Omega \\ \dot{A}_2 = A_3R - A_1\Omega \\ \dot{A}_3 = -A_2R \end{cases}$$
 решается

стандартным образом. Одна из переменных выражается через остальные и подставляется в оставшиеся уравнения. В результате для каждой координаты получается уравнение гармонических колебаний с частотой  $R_\Omega$ , что вполне естественно, так как вектор  $\vec{A}$  вращается с угловой скоростью  $-\vec{R}_\Omega$ .

Для каждой переменной получаем решение в виде:

$A_i = a_i \cos(R_\Omega t) + b_i \sin(R_\Omega t)$ , где  $a_i$  и  $b_i$  — произвольные константы интегрирования, которые находятся из начальных условий и самих уравнений.

Произвольные константы интегрирования  $a_i$  можно найти из условия

$$\vec{A}(0) = \begin{pmatrix} -\frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ -\frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ \frac{R^2 w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{pmatrix},$$

а константы  $b_i$  из величины  $\dot{\vec{A}}(0)$ , которую можно найти, подставив  $\vec{A}(0)$  в правую часть равенства

$$\begin{cases} \dot{A}_1 = A_2\Omega \\ \dot{A}_2 = A_3R - A_1\Omega \\ \dot{A}_3 = -A_2R \end{cases}.$$

В результате получим:

$$\vec{A} = \frac{Rw^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \begin{pmatrix} -\Omega \cdot \cos(R_\Omega t) - \frac{\Omega\gamma}{R_\Omega} \cdot \sin(R_\Omega t) \\ -\gamma \cdot \cos(R_\Omega t) + R_\Omega \cdot \sin(R_\Omega t) \\ R \cdot \cos(R_\Omega t) + \frac{R\gamma}{R_\Omega} \cdot \sin(R_\Omega t) \end{pmatrix}, \quad \text{где } w^0 = \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0.$$

Нас интересует только усиление среды, которое связано со второй компонентой вектора Блоха  $B_2 = v_{\text{смац}} + A_2(t) \cdot e^{-\gamma t}$ .

Тогда

$$B_2 = \frac{Rw^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \left( \gamma - \gamma \cdot \cos(R_\Omega t) \cdot e^{-\gamma t} + R_\Omega \cdot \sin(R_\Omega t) \cdot e^{-\gamma t} \right).$$

Как было получено при рассмотрении физического смысла компонент вектора Блоха:

$$\aleph = -\frac{4\pi\omega}{n_0c} \cdot p \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{B_2(V_z)}{\varepsilon_0} N_{0V_z} dV_z.$$

Подставим сюда  $B_2$  и  $R = \frac{p\varepsilon_0}{\hbar}$  и получим:

$$\aleph = -\frac{4\pi\omega p^2}{n_0c\hbar R} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} B_2(V_z) \cdot N_{0V_z} dV_z.$$

При условиях  $\begin{cases} \gamma \ll kU \\ R \ll kU \end{cases}$  интеграл можно взять. Под интегралом три

слагаемых. В первом слагаемом лоренцевский контур можно рассматривать, как дельта-функцию Дирака. Интеграл от второго слагаемого гораздо меньше интеграла от третьего слагаемого и это второе слагаемое можно отбросить. Интеграл от третьего слагаемого выражается через функцию Бесселя. В результате:

$$\aleph = \frac{4\pi\sqrt{\pi}\omega p^2 N_0}{n_0c\hbar kU} \cdot e^{-\left(\frac{\omega-\omega_{21}}{kU}\right)} \cdot \left( \frac{\gamma(\rho_{22}^0 - \rho_{11}^0)}{\sqrt{\gamma^2 + R^2}} + e^{-\gamma t} \cdot J_0(Rt) \right).$$

Здесь слагаемое независящее от времени — это стационарное насыщенное светом поглощение, слагаемое пропорциональное  $e^{-\gamma t}$  — это нестационарное поглощение,  $J_0$  — функция Бесселя с нулевым значком.

Напомним, что одно из определений функции Бесселя имеет вид:

$$J_m(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(mt - z \cdot \sin(t)) \cdot dt.$$

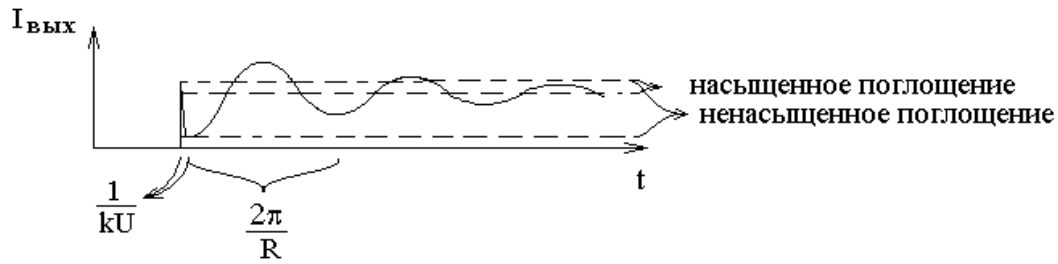
Интенсивность на выходе кюветы для оптически тонкого слоя среды толщиной  $L$ :

$$I_{\text{вых}} = I_{\text{вх}} (1 - \aleph L).$$

-----

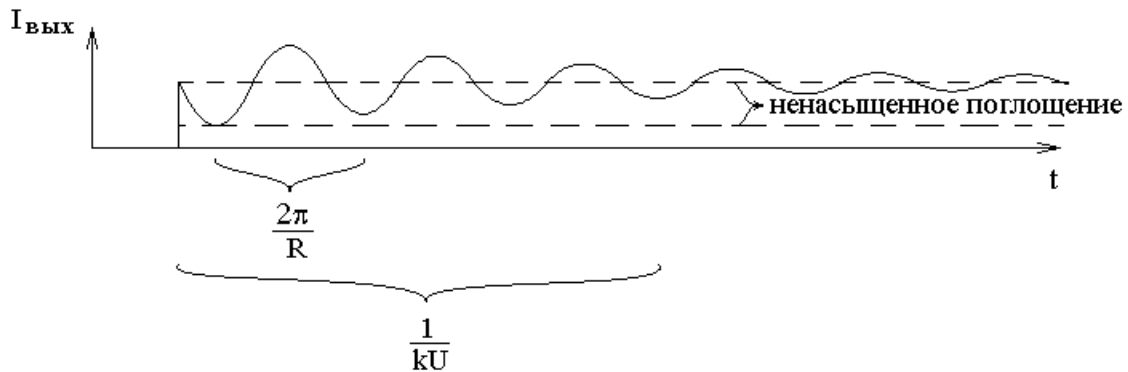
Как уже говорилось выше, вид зависимости интенсивности света на выходе из кюветы от времени различается при условии  $R \ll kU$  и при условии  $kU \ll R$ .

В случае относительно слабого поля  $\gamma \ll R \ll kU$ :



Быстрый спад интенсивности за первый промежуток времени  $\frac{1}{kU}$  полученная нами выше формула не описывает, так как она была получена при предположении, что доплеровская ширина линии  $kU$  велика  $kU \gg R$ .

В случае сильного светового поля  $R \gg kU$ :

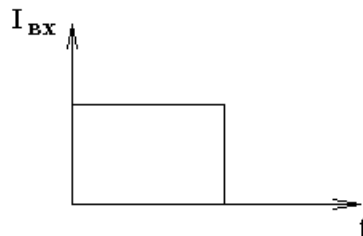


### Затухание свободной поляризации (ЗСП). Сверхизлучение.

Оптическая схема опыта для наблюдения сигнала затухания свободной поляризации обычна для нестационарной лазерной спектроскопии:

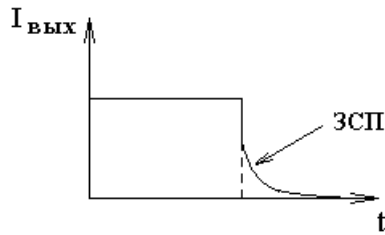


На входе в кювету свет резко выключают.



Как показывает опыт, зависимость интенсивности света на выходе кюветы от времени имеет следующий вид:





Сигнал ЗСП — это послесвечение диполей, раскачанных световым полем. Особенность сигнала состоит в том, что он спадает гораздо быстрее, чем затухает излучение каждого диполя:  $I \sim e^{-\gamma t}$ .

Причина быстрого спада в том, что сначала диполи молекул излучают синфазно, и их излучения складываются по амплитуде, а затем происходит расфазировка диполей. При полной расфазировке излучение диполей складывается по интенсивности.

Если складываются амплитуды, то амплитуда суммарной волны в  $N$  раз больше, чем амплитуда излучения одной молекулы, здесь  $N$  — общее число молекул. Интенсивность света суммарной волны пропорциональна квадрату амплитуды и, следовательно, пропорциональна  $N^2$ .

Если излучение разных молекул складывается по интенсивности, то суммарная интенсивность в  $N$  раз больше интенсивности излучения одной молекулы.

Следовательно, при расфазировке диполей интенсивность света уменьшается примерно в  $N$  раз за время расфазировки, которое может быть гораздо меньше времени  $\frac{1}{\gamma}$ , за которое затухает, как  $e^{-\gamma t}$ , излучение одной молекулы.

Обсудим подробнее механизм и время расфазировки.

Колебания диполя похожи на колебания механического маятника. Пока есть вынуждающая сила со стороны светового поля, вынужденные колебания диполя происходят на частоте светового поля. Как только световое поле выключают, колебания продолжают с той же фазы, но уже на собственной частоте колебаний диполя, на частоте перехода  $\omega_{21}$ .

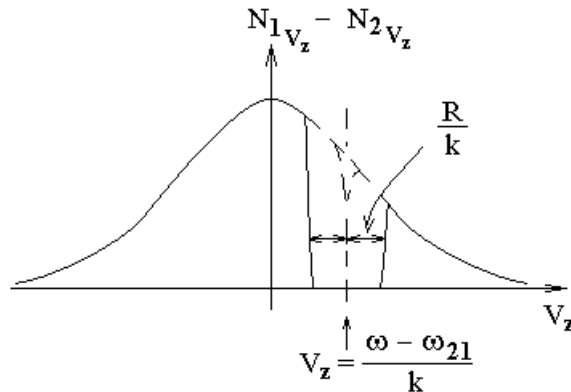
В системе отсчета диполя каждый диполь после выключения поля совершает колебания и излучает на частоте перехода  $\omega_{21}$ , но в лабораторной системе отсчета частоты излучений диполей оказываются различными из-за различных доплеровских сдвигов  $kV_z$ .

Частота излучения диполя в лабораторной системе отсчета равна  $\omega_{21} + kV_z$ , где  $V_z$  — проекция скорости диполя на направление излучения диполя.

Время затухания сигнала ЗСП — это время расфазировки диполей. Время расфазировки зависит от разности частот излучения разных диполей, то есть от ширины спектра излучения  $\Delta\omega$ .

Тогда время затухания ЗСП равно  $\Delta t \approx \frac{1}{\Delta\omega}$ .

Величина  $\Delta\omega$  определяется возможными значениями  $kV_z$ . Ситуация различается в двух случаях. Если частота Раби меньше доплеровской ширины спектральной линии  $R < kU$ , то резонансно со светом взаимодействуют молекулы, для которых расстройка  $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$  меньше частоты Раби  $|\Omega| < R$ . Тогда  $\Delta\omega \approx \Delta(kV_z) \approx R$  и  $\Delta t \approx \frac{1}{R}$  — ожидаемое время затухания ЗСП.



Если частота Раби больше доплеровской ширины  $R > kU$ , то  $\Delta\omega \approx kU$  и  $\Delta t \approx \frac{1}{kU}$ .

Что происходит с энергией запасенной диполями? Пропадает ли эта энергия за время  $\frac{1}{R}$  (в случае  $R < kU$ ) или за время  $\frac{1}{\gamma}$ ?

Оказывается, что энергия пропадает медленно. Тогда куда же она пропадает?

Дело в том, что синфазно излучение диполей только в первый момент и только вперед по ходу луча. Расфазировка диполей приводит к перераспределению излучения диполей по всем направлениям без изменения мощности излучения каждого диполя по всем направлениям и без изменения мощности излучения всей среды.

### Сверхизлучение.

Сверхизлучение — это не ЗСП, а скорее наоборот.

ЗСП — это ускоренное падение интенсивности на приемнике без изменения скорости распада возбуждения  $\rho_{22} \sim e^{-\gamma_2 t}$ . Сверхизлучение — ускоренное падение интенсивности за счет ускоренного распада возбуждения, когда  $\rho_{22}$  спадает быстрее, чем  $e^{-\gamma_2 t}$ .

Сверхизлучение — это синфазное излучение диполей во всех направлениях, и ускоренная потеря энергии диполей.

При сверхизлучении интенсивность света пропорциональна квадрату концентрации  $I \sim N_0^2$ , а при обычном излучении пропорциональна первой степени концентрации  $I \sim N_0$ .

Рассмотрим диполи молекул, расположенные в малом объеме  $V < \left(\frac{\lambda}{2}\right)^3$ .

Пусть молекулы неподвижны, а их диполи осциллируют во внешнем световом поле. После выключения света диполи осциллируют синфазно и синфазно излучают во всех направлениях, так как разность хода для излучения диполей в любом направлении меньше  $\frac{\lambda}{2}$ . При этом их излучения складываются по амплитуде. Амплитуда суммарной волны в  $N$  раз больше амплитуды излучения одного диполя, а интенсивность в  $N^2$  раз больше.

Такое сверхизлучение проявляется и в случае вынужденного светом и в случае спонтанного излучения молекул, предварительно заброшенных на верхний уровень энергии. В случае спонтанного излучения появляющиеся осциллирующие диполи вынуждают спонтанный распад друг друга.

Заметим, что уравнения для матрицы плотности с феноменологическим затуханием не содержат сверхизлучения, так как феноменологически распад пропорционален  $e^{-\gamma_2 t}$  по определению.

Количественное описание ЗСП — затухания свободной поляризации.

Сигнал ЗСП можно рассчитать согласно следующей логической цепочке:

$$\vec{B}_{стац}(V_z) \rightarrow \vec{B}_{зам}(V_z, t) \rightarrow \vec{P}_{V_z}(t) \rightarrow \vec{E}_{вых}(t) \rightarrow \mathcal{E}_{0_{вых}}(t).$$

Сначала найдем стационарное значение вектора Блоха  $\vec{B}_{стац}$  перед выключением светового поля. Это стационарное значение является решением уравнения для вектора Блоха с нулевой производной по времени:

$$\gamma \vec{B}_{стац} = [\vec{B}_{стац}, \vec{R}_\Omega] + \vec{W}^0.$$

Решение этих трех линейных уравнений с тремя неизвестными координатами вектора Блоха имеет следующий вид:

$$\begin{cases} u_{стац} = \frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ v_{стац} = \frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2}, \text{ где } w^0 = \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0. \\ w_{стац} = \frac{(\gamma^2 + \Omega^2) w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{cases}$$

После выключения светового поля вектор Блоха затухает к новому

стационарному значению  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ w^0 \end{pmatrix}$ . Как обсуждалось ранее в вопросе

о решениях уравнения для вектора Блоха, затухающее решение представляет

собой вектор, вращающийся с угловой скоростью  $-\vec{R}_\Omega$ . Длина вектора затухающего решения экспоненциально убывает во времени, как  $e^{-\gamma t}$ .

Величину затухающего решения в нулевой момент времени выключения светового поля можно найти из начальных условий:

$$\vec{B}_{\text{стац}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0 \end{pmatrix} + \vec{B}_{\text{зам}}(0).$$

Откуда

$$\vec{B}_{\text{зам}}(0) = \begin{pmatrix} \frac{R\Omega w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ \frac{\gamma R w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \\ -\frac{R^2 w^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \end{pmatrix}.$$

Здесь  $R = \frac{p\mathcal{E}_0}{\hbar}$  — частота Раби для светового поля перед его выключением.

Затухающее решение вращается вокруг вертикально оси, вокруг вектора:

$$-\vec{R}_\Omega = -\begin{pmatrix} R \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \Omega \end{pmatrix},$$

так как после выключения светового поля частота Раби равна нулю  $R = 0$ .

Нас будут интересовать только две первых компоненты  $u$  и  $v$  вектора Блоха, так как только от них зависит поляризация среды, и только от них зависит сигнал затухания свободной поляризации.

Вращение с частотой  $(-\Omega)$  затухающей, как  $e^{-\gamma t}$ , составляющей вектора Блоха в горизонтальной плоскости  $\vec{B}_\perp$  означает, что первые две компоненты вектора Блоха подчиняются следующим уравнениям:

$$\begin{cases} u_{\text{зам}} = e^{-\gamma t} B_\perp \cos(\beta - \Omega t) \\ v_{\text{зам}} = e^{-\gamma t} B_\perp \sin(\beta - \Omega t) \end{cases}.$$

Сравнивая эти уравнения и значения первых двух проекций затухающей составляющей вектора Блоха в нулевой момент времени  $\vec{B}_{\text{зам}}(0)$ , можно найти константы  $B_\perp$  и  $\beta$ .

В результате получаем:

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{zam} = \frac{Rw^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \cdot e^{-\gamma t} (\Omega \cdot \cos(\Omega t) + \gamma \cdot \sin(\Omega t)) \\ v_{zam} = \frac{Rw^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \cdot e^{-\gamma t} (\gamma \cdot \cos(\Omega t) - \Omega \cdot \sin(\Omega t)) \end{array} \right., \text{ где } \left\{ \begin{array}{l} \Omega = \omega - kV_z - \omega_{21} \\ w^0 = \rho_{22}^0 - \rho_{11}^0 \end{array} \right.$$

Распределение поляризации среды по проекции скорости молекул на луч выражается через две первые компоненты вектора Блоха:

$$P_{V_z} = p N_{0V_z} (u(V_z) \cdot \cos(\varphi) - v(V_z) \cdot \sin(\varphi)) = \text{Re} \left( p N_{0V_z} (u(V_z) - iv(V_z)) e^{-i\varphi} \right)$$

Откуда комплексная амплитуда поляризации среды выражается через первые две компоненты вектора Блоха:

$$\tilde{P}_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} p N_{0V_z} \cdot (u_{zam}(V_z) - iv_{zam}(V_z)) \cdot dV_z.$$

Далее, амплитуду светового поля на выходе кюветы можно найти с помощью укороченного волнового уравнения:

$$\frac{d\tilde{E}_0}{dz} = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0.$$

Будем считать, что длина кюветы  $\Delta z$  мала. Тогда производная от амплитуды света по координате почти постоянна вдоль луча, и

$$\Delta \tilde{E}_0 = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \cdot \Delta z.$$

Света на входе в кювету больше нет, поэтому

$$\tilde{E}_{0_{вых}} = \Delta \tilde{E}_0 = 2\pi i \frac{\omega}{n_0 c} \tilde{P}_0 \cdot \Delta z$$

Попытаемся найти амплитуду светового поля на выходе кюветы при условии  $R \ll kU$ .

Функция  $u_{zam} = \frac{Rw^0}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} \cdot e^{-\gamma t} (\Omega \cdot \cos(\Omega t) + \gamma \cdot \sin(\Omega t))$  — узкая в зависимости от  $\Omega$  по сравнению с  $kU$  и нечетная функция от  $\Omega$ , поэтому интеграл  $\int_{-\infty}^{+\infty} N_{0V_z} \cdot p \cdot u_{zam} \cdot dV_z$  очень мал, и им можно пренебречь. Если считать, что  $N_{0V_z} = const$ , то интеграл просто равен нулю, но  $N_{0V_z}$  — медленная (широкая) функция от  $V_z$  и от  $\Omega = \omega - kV_z - \omega_{21}$ , поэтому интеграл очень мал.

Тогда

$$\tilde{E}_{0_{вых}} = 2\pi \frac{\omega p \Delta z}{n_0 c} \int_{-\infty}^{+\infty} N_{0V_z} v_{zam}(V_z) dV_z \quad \Rightarrow$$

$$\tilde{E}_{0_{\text{вых}}} = 2\sqrt{\pi}\varepsilon_0 \frac{\omega p^2 N_0 (\rho_{22}^0 - \rho_{11}^0) \Delta z}{n_0 c \hbar k U} e^{-\gamma t} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\Omega \cdot \sin(\Omega t) - \gamma \cdot \cos(\Omega t)}{\gamma^2 + R^2 + \Omega^2} d\Omega$$

Второе слагаемое под интегралом меньше первого при условии  $\gamma \ll R$ , тогда

$$\tilde{E}_{0_{\text{вых}}} = 2\sqrt{\pi}\varepsilon_0 \frac{\omega p^2 N_0 (\rho_{22}^0 - \rho_{11}^0) \Delta z}{n_0 c \hbar k U} e^{-\gamma t} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{21}}{kU}\right)^2} \cdot F\left(\sqrt{\gamma^2 + R^2} t\right), \text{ где}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot \sin(t)}{x^2 + t^2} dt.$$

Интеграл можно найти, как мнимую часть интеграла  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{t \cdot e^{it}}{x^2 + t^2} dt$ . Путь

интегрирования этого интеграла можно замкнуть на комплексной плоскости по полуокружности в верхней части комплексной полуплоскости. Интеграл по замкнутому контуру на комплексной плоскости равен коэффициенту  $2\pi i$ , умноженному на вычет в точке  $t = ix$ . В результате интеграл равен  $F(x) = \pi \cdot e^{-x}$ .

$$F\left(\sqrt{\gamma^2 + R^2} t\right) \approx F(Rt) \text{ при } R \gg \gamma.$$

Тогда

$$\varepsilon_{0_{\text{вых}}} = \tilde{E}_{0_{\text{вых}}} = -2\pi\sqrt{\pi}\varepsilon_0 \frac{\omega p^2 N_0 (\rho_{11}^0 - \rho_{22}^0) \Delta z}{n_0 c \hbar k U} e^{-(\gamma+R)t} e^{-\left(\frac{\omega - \omega_{21}}{kU}\right)^2}.$$

Отметим, что сигнал ЗСП пропорционален  $e^{-(\gamma+R)t}$ , а оптические нутации пропорциональны  $e^{-\gamma t} J_0(Rt)$ . Тогда при условии  $R \ll kU$  сигнал ЗСП, как и сигнал оптических нутаций, затухает примерно за один период колебаний с частотой Раби  $R$ .