Лекция 20. Фазовые переходы II рода

20.2. Влияние внешнего поля на фазовый переход II рода.

В присутствии однородного внешнего поля h (это может быть напряженность магнитного поля H или напряженность электрического поля E) разложение термодинамического потенциала в теории Ландау можно записать как

$$G(P,T,\eta,h) = G_0 + a\cdot(T - T_c)\cdot\eta^2 + B\eta^4 - \eta hV. \qquad (20.2.1)$$

Как и ранее, равновесные значения параметра порядка, отвечающие разным фазам, определяются из условия экстремальности

$$\frac{\partial G(P,T,\eta,h)}{\partial\eta} = 0, \qquad (20.2.2)$$

которое ввиду (20.2.1) сводится к уравнению

$$a\cdot(T - T_c)\cdot 2\eta + 4B\eta^3 - hV = 0. \qquad (20.2.3)$$

Ни один корень этого уравнения при $h \neq 0$ не равен нулю. Таким образом, можно сказать, что внешнее поле понижает симметрию более симметричной фазы и размывает фазовый переход.

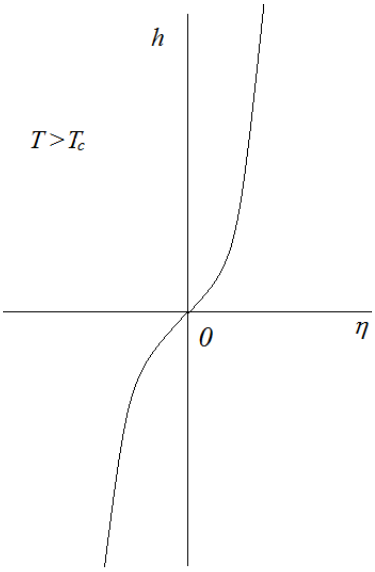
Исследуем корни уравнения (20.2.3) подробнее. При $T > T_c$ для более симметричной фазы (20.2.3) находим

$$h = \frac{a\cdot(T - T_c)\cdot 2\eta + 4B\eta^3}{V}, \qquad (20.2.4)$$

$$\frac{\partial h}{\partial\eta} = \frac{a\cdot(T - T_c)\cdot 2 + 12B\eta^2}{V} > 0. \qquad (20.2.5)$$

Так как $\partial h/\partial\eta > 0$, то каждому значению h соответствует только один корень $\eta(T,P,h)$. Из (20.2.1) и (20.2.5) видим, что

$$\frac{\partial^2 G(P,T,\eta,h)}{\partial\eta^2} = a\cdot(T - T_c)\cdot 2 + 12B\eta^2 = V\frac{\partial h}{\partial\eta}, \qquad (20.2.6)$$



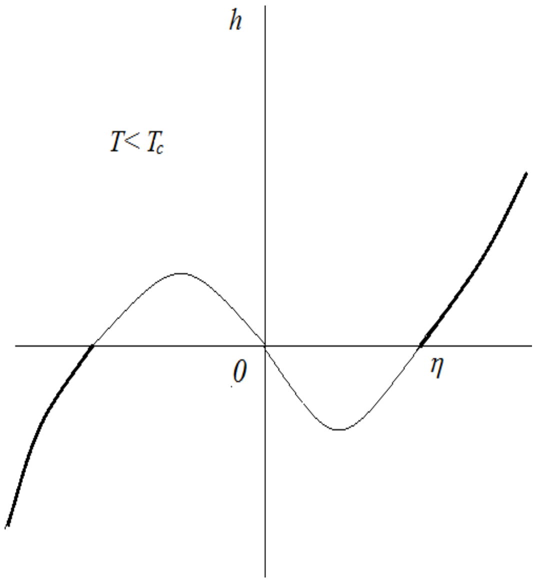
поэтому корни $\eta(T,P,h)$ уравнения (20.2.4) соответствуют минимуму термодинамического потенциала. Поведение h в согласии с (20.2.4) можно изобразить графически как показано на рисунке слева.

При $T<T_c$ для менее симметричной фазы из (20.2.3) находим

$$h=\frac{-a\cdot(T_c-T)\cdot 2\eta+4B\eta^3}{V}, \qquad (20.2.7)$$

$$\frac{\partial h}{\partial \eta}=\frac{-a\cdot(T_c-T)\cdot 2+12B\eta^2}{V}=\frac{1}{V}\frac{\partial^2 G(P,T,\eta,h)}{\partial \eta^2}. \qquad (20.2.8)$$

В точках, в которых $\partial h/\partial \eta>0$ (эти точки попадают на кривые левее максимума и правее минимума $h(\eta)$, как показано на рисунке справа), корни уравнения (20.2.7) отвечают минимумам термодинамического потенциала. Точки, в которых $\partial h/\partial \eta<0$, отвечают максимумам термодинамического потенциала, т.е. неустойчивым состояниям. Жирными линиями на рисунке обозначены точки, отвечающие более устойчивым (характеризующимися более глубокими минимумами G) фазам при положительных и отрицательных h. Видим, что при значениях h, лежащих между максимумом и минимумом $h(\eta)$ возможны фазовые переходы 1 рода.



Определим восприимчивость системы к полю h как

$$\chi\equiv\left.\frac{\partial \eta}{\partial h}\right|_{h\to 0}. \qquad (20.2.9)$$

Как следует из (20.2.5) и (20.2.8)

$$\chi = \frac{V}{\dfrac{\partial^2 G(P,T,\eta,h)}{\partial\eta^2}}. \qquad (20.2.10)$$

При $T > T_c$ для более симметричной фазы из (2.2.4) и (2.2.6) имеем при $h \to 0$

$$\bar{\eta} \to 0, \qquad \chi = \frac{V}{2a\cdot(T - T_c)}. \qquad (20.2.11)$$

При $T < T_c$ для менее симметричной фазы из (20.2.7) и (20.2.8) при $h \to 0$ получаем

$$\bar{\eta}^2 \to \frac{a\cdot(T_c - T)}{2B},$$

$$\chi = \frac{V}{-2a\cdot(T_c - T) + 6a\cdot(T_c - T)} = \frac{V}{4a\cdot(T_c - T)}. \qquad (20.2.12)$$

Видим, что восприимчивость χ испытывает скачок в точке фазового перехода, причем слева и справа от тоски перехода имеет место

$$\chi = A_2(T_c - T)^{-1}, \;\; \chi = A_1(T - T_c)^{-1}. \qquad (20.2.13)$$

Это означает, что классические критические индексы для восприимчивости равны 1.

Изменение параметра порядка во внешнем поле при $T < T_c$ можем оценить как

$$\Delta\eta \simeq \left.\frac{\partial\eta}{\partial h}\right|_{h\to 0} h = \chi h. \qquad (20.2.14)$$

Учитывая (20.2.12), отсюда находим

$$\Delta\eta \simeq \frac{Vh}{4a\cdot(T_c - T)}. \qquad (20.2.15)$$

При

$$h_1 \simeq \frac{\left[a\cdot\left(T_c - T\right)\right]^{\frac{3}{2}}}{\left(2B\right)^{\frac{1}{2}} V} \tag{20.2.16}$$

имеем $\Delta\eta \simeq \overline{\eta}$, т.е. индуцированный внешним полем сдвиг параметра порядка оказывает таким же как и равновесное значение параметра порядка при $T < T_c$. Это позволяет различить сильные и слабые поля условиями $h >> h_1$ и $h << h_1$. При малых отклонениях T от T_c любое поле может рассматриваться как сильное. В сильном поле различие между симметричной и несимметричной фазой стирается.

20.3. Флуктуации параметра порядка. Учет неоднородности флуктуаций. Критерий Леванюка-Гинзбурга.

Минимальная работа, требуемая для флуктуационного вывода системы из состояния равновесия при заданных давлении P и температуре T, равна изменению потенциала Гиббса ΔG системы при рассматриваемой флуктуации. Соответственно вероятность w такой флуктуации пропорциональна

$$w \propto \exp\left(-\frac{\Delta G}{k_B T}\right). \tag{20.3.1}$$

Пусть $\overline{\eta}$– равновесное значение параметра порядка. При малом отклонении η от равновесия имеем

$$\Delta G = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}\right)_{P,T,\overline{\eta}} \left(\eta - \overline{\eta}\right)^2 . \tag{20.3.2}$$

В предыдущем разделе было показано, что

$$\left(\frac{\partial^2 G}{\partial \eta^2}\right)_{P,T,\overline{\eta}} = 2a\left(T - T_0\right) + 12B\overline{\eta}^2 = \frac{V}{\chi} . \tag{20.3.3}$$

Подставляя (20.3.3) в (20.3.2), находим

$$\Delta G = \frac{V}{2\chi}\left(\eta - \overline{\eta}\right)^2 . \tag{20.3.4}$$

Учитывая (20.3.4) в (20.3.1), имеем

$$w \propto \exp\left(-\frac{V\left(\eta-\bar{\eta}\right)^2}{2\chi k_B T}\right),$$

откуда следует, что среднеквадратичная флуктуация $\left\langle\left(\Delta\eta\right)^2\right\rangle$ параметра порядка в рассматриваемой системе определяется как

$$\left\langle\left(\Delta\eta\right)^2\right\rangle = \frac{k_B T\chi}{V}. \qquad (20.3.5)$$

Учтем теперь также другой результат предыдущего раздела, что

$$\chi = \begin{cases} \dfrac{V}{2a\left(T-T_c\right)}, & T > T_c, \\ \dfrac{V}{4a\left(T_c-T\right)}, & T < T_c. \end{cases} \qquad (20.3.6)$$

Из (20.3.5) и (20.3.6) видим, что при приближении к критической температуре в однородных симметричной и в несимметричной фазах происходит неограниченное возрастание среднеквадратичной флуктуации параметра порядка. Учет следующих членов разложения в (20.3.2) при $B > 0$ несколько поправляет эту ситуацию, однако более сильным оказывается учет неоднородности флуктуаций параметра порядка.

До сих пор мы рассматривали флуктуации, не приводящие к возникновению неоднородности в системе. Однако такие флуктуации, характеризующиеся отклонениями $\eta\left(\vec{r}\right)-\bar{\eta}$, очевидно возможны, и мы должны сейчас это учесть. Рассмотрение неоднородных систем и тел удобно проводить в большом каноническом ансамбле. Перейдем от потенциала Гиббса G к большому термодинамическому потенциалу Ω. Повторяя рассуждения из предыдущего раздела, но учитывая теперь нелокальность зависимости Ω от параметра порядка посредством зависимости плотности большого термодинамического потенциала от градиента $\nabla\eta\left(\vec{r}\right)$, представим потенциал Ω флуктуирующей неоднородной системы в как

$$\Omega = \int_V d\vec{r}\left[\omega_0 + \alpha\cdot\left(T-T_c\right)\eta^2\left(\vec{r}\right) + b\eta^4\left(\vec{r}\right) + g\left(\nabla\eta\left(\vec{r}\right)\right)^2\right], \qquad (20.3.7)$$

где ω_0 – плотность большого термодинамического потенциала системы при $\eta = 0$, коэффициенты

$$\alpha(\mu) = \frac{a}{V}, \quad b(\mu) = \frac{B}{V}, \quad g(\mu) > 0. \tag{20.3.8}$$

Ограничимся ниже рассмотрением флуктуаций в симметричной фазе при $\bar{\eta} = 0$. Теория в несимметричной фазе может быть построена аналогично. В симметричной фазе в пренебрежении слагаемым $b\eta^4(\vec{r})$ имеем

$$w \propto \exp\left(-\frac{\Delta\Omega}{k_B T}\right),$$

$$\Delta\Omega = \int_V d\vec{r}\left[\alpha\cdot(T - T_c)\eta^2(\vec{r}) + g\left(\nabla\eta(\vec{r})\right)^2\right]. \tag{20.3.9}$$

Разложим функцию $\eta(\vec{r})$ в ряд Фурье

$$\eta(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}. \tag{20.3.10}$$

Подставляя (20.3.10) в (20.3.9) и учитывая равенства

$$\eta_{-\vec{k}} = \eta_{\vec{k}}^*, \tag{20.3.11}$$

$$\int_V d\vec{r} \sum_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}} \sum_{\vec{k}'} \eta_{\vec{k}'} e^{i\vec{k}'\vec{r}} = V \sum_{\vec{k}} \left|\eta_{\vec{k}}\right|^2, \tag{20.3.12}$$

$$\int_V d\vec{r} \sum_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}} \vec{k} e^{i\vec{k}\vec{r}} \sum_{\vec{k}'} \eta_{\vec{k}'} \vec{k}' e^{i\vec{k}'\vec{r}} = -V \sum_{\vec{k}} k^2 \left|\eta_{\vec{k}}\right|^2, \tag{20.3.13}$$

получаем

$$\Delta\Omega = V \sum_{\vec{k}} \left[\alpha t + g k^2\right] \left|\eta_{\vec{k}}\right|^2, \tag{20.3.14}$$

где введено обозначение $t \equiv T - T_c$. Отсюда, по аналогии с (20.3.5), сразу находим для среднеквадратичных флуктуаций модуля фурье-компонент $\left\langle \left|\eta_{\vec{k}}\right|^2 \right\rangle$ параметра порядка:

$$\left\langle \left|\eta_{\vec{k}}\right|^2 \right\rangle = \frac{k_B T}{2V\left(\alpha t + g k^2\right)}. \qquad (20.3.15)$$

Выражение (20.3.15) называют коррелятором Орнштейна-Цернике. Из него следует, что с уменьшением t возрастают флуктуации фурье-компонент параметра порядка с малыми k, которые можно назвать длинноволновыми флуктуациями. Для коротковолновых флуктуаций особенностей в поведении при приближении к критической точке нет. Заметим, однако, что сама формула (20.39) справедлива в предположении, что $k < 2\pi/\bar{a}$, где $\bar{a}$ –среднее межатомное расстояние в системе.

Аналогично тому, как мы делали в теории рентгеновского рассеяния в жидкостях, определим корреляционную функцию

$$G\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \left\langle \eta\left(\vec{r}_1\right)\eta\left(\vec{r}_2\right) \right\rangle. \qquad (20.3.16)$$

Подставляя (20.3.10) в (20.3.16), получаем

$$G\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \left\langle \sum_{\vec{k}} \sum_{\vec{k}'} \eta_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}'} e^{i\left(\vec{k}+\vec{k}'\right)\vec{r}_2} e^{i\vec{k}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)} \right\rangle. \qquad (20.3.17)$$

Для того, чтобы правая часть (20.3.17) зависела только от $\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, должно быть выполнено равенство $\sum_{\vec{k}'} \left\langle \eta_{\vec{k}'} \eta_{\vec{k}} e^{i\left(\vec{k}+\vec{k}'\right)\vec{r}_2} \right\rangle = \left\langle \eta_{-\vec{k}} \eta_{\vec{k}} \right\rangle$, откуда с учетом равенства (20.3.11) имеем

$$G\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \sum_{\vec{k}} \left\langle \left|\eta_{\vec{k}}\right|^2 \right\rangle e^{i\vec{k}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right)}. \qquad (20.3.18)$$

Переходя в правой части (20.3.18) от суммирования к интегрированию по $\vec{k}$ и учитывая (20.3.15) и $k < 2\pi/\bar{a}$, запишем

$$
\begin{aligned}
G(\vec{r}_1-\vec{r}_2) &= \frac{V}{(2\pi)^3}\int d\vec{k}\left\langle\left|\eta_{\vec{k}}\right|^2\right\rangle e^{i\vec{k}(\vec{r}_1-\vec{r}_2)} = \\
&= \frac{k_BT}{2(2\pi)^2}\int\limits_0^{2\pi/\bar{a}}\frac{dkk^2}{\left(\alpha t+gk^2\right)}\int\limits_{-1}^{1}d\cos\theta e^{ikr\cos\theta} \simeq \\
&\simeq \frac{k_BT}{2(2\pi)^2 g}\int\limits_0^{\infty}\frac{dkk}{ir\left(\alpha t/g+k^2\right)}\left(e^{ikr}-e^{-ikr}\right) = \\
&= \frac{k_BT}{2(2\pi)^2 g}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{dkk}{ir\left(\alpha t/g+k^2\right)}e^{ikr} = \frac{k_BT}{8\pi gr}e^{-r/\xi}
\end{aligned}
\qquad (20.3.19)
$$

(была использована теория вычетов). Величина

$$\xi \equiv \sqrt{g/\alpha t} \qquad (20.3.20)$$

называется корреляционным радиусом флуктуаций параметра порядка. При $t \to 0$ $(T \to T_c)$ эта величина неограниченно возрастает. Поэтому можно говорить **о возникновении дальнего порядка при приближении к критической точке**.

Очевидно, что $G(0)=\left\langle\eta(\vec{r})^2\right\rangle$ определяет средний квадрат флуктуации параметра порядка в данной точке системы. Из (20.3.19) находим

$$G(0)=\frac{k_BT}{(2\pi)^2 g}\int\limits_0^{2\pi/\bar{a}}\frac{dkk^2}{\alpha t/g+k^2}=\frac{2\pi}{\bar{a}}-\frac{1}{\xi}\operatorname{arctg}\left(\frac{2\pi\xi}{\bar{a}}\right). \qquad (20.3.21)$$

Из-за ограниченности арктангенса правая часть (20.3.21) в трехмерной системе конечна и при $T \to T_c$ (при $\xi \to \infty$).

Сформулируем теперь критерий применимости теории Ландау. Вспомним, что среднее значение параметра порядка в несимметричной фазе в теории Ландау равно

$$\bar{\eta}^2 = \alpha|t|/b. \qquad (20.3.22)$$

В качестве условия применимости теории, основанной на разложении Ландау, следует потребовать, чтобы был мал по сравнению со средним значением (20.3.22) средний квадрат флуктуации параметра порядка, усредненный по корреляционному объему $V=\xi^3$. Эта величина получается из (20.3.5) подстановкой $V=\xi^3$. Таким образом, из (20.3.5) и (20.3.22) следует условие применимости теории Ландау в виде

$$\frac{k_B T_c \chi b}{\xi^3 \alpha |t|} << 1. \qquad (20.3.23)$$

Учитывая (20.3.6), (20.3.8) и (20.3.20), можем переписать условие (20.3.23) в виде

$$\frac{k_B T_c b}{g^{3/2}\left(\alpha|t|\right)^{1/2}} << 1 \qquad (20.3.24)$$

или как

$$\frac{|T-T_c|}{T_c} \gg \frac{k_B^2 T_c b^2}{\alpha g^3}. \qquad (20.3.25)$$

Это условие называют критерием Леванюка-Гинзбурга. Видим, что существует узкая область значений температуры вблизи T_c, в которой теория Ландау неприменима. Этот интервал называют флуктуационным. Безразмерную величину в правой части (20.3.25) называют числом Гинзбурга

$$\mathrm{Gi} \equiv \frac{k_B^2 T_c b^2}{\alpha g^3}. \qquad (20.3.26)$$

20.4. Эффективный гамильтониан. Масштабная инвариантность (скейлинг)

Для описания свойств фазового перехода второго рода вне области применимости теории Ландау (т.е., при таких температурах вблизи критической точки, при которых флуктуации параметра порядка уже велики) используют так называемый эффективный гамильтониан. Поясним идею подхода.

Имеет место строгое соотношение для большого термодинамического потенциала Ω незамкнутой системы

$$\Omega \equiv -k_B T \ln \sum_{N=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\mu N}{k_B T}\right) \int d\Gamma'_N \exp\left(-\frac{H_N}{k_B T}\right), \qquad (20.4.1)$$

где μ – химический потенциал частиц системы, H_N – гамильтониан системы из N частиц, интегрирование проводится по всему фазовому пространству при каждом возможном значении числа N частиц в системе. Если же распространить интегрирование лишь по той части фазового пространства, которая отвечает некоторому заданному распределению (полю) параметра порядка $\eta(\vec{r}) = \sum_{\vec{k}} \eta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$,

то

$$\Omega\left[\eta(\vec{r})\right] \equiv -k_B T \ln \sum_{N=0}^{\infty} \exp\left(\frac{\mu N}{k_B T}\right) \int d\Gamma'_N \exp\left(-\frac{H_N}{k_B T}\right) \cdot \\ \cdot \prod_{\vec{k}} \delta\left(\eta'_{\vec{k}} - \eta'_{\vec{k}}(p,q;N)\right) \delta\left(\eta''_{\vec{k}} - \eta''_{\vec{k}}(p,q;N)\right), \qquad (20.4.2)$$

где $\eta'_{\vec{k}} \equiv \mathrm{Re}\,\eta_{\vec{k}}$, $\eta''_{\vec{k}} \equiv \mathrm{Im}\,\eta_{\vec{k}}$, $\eta'_{\vec{k}}(p,q;N)$ и $\eta''_{\vec{k}}(p,q;N)$ – формальные «микроскопические» (или динамические) образы вещественной и мнимой частей $\eta_{\vec{k}}$, определенные как функции фазовых переменных при каждом значении N. Имеем для большой статистической суммы Ξ при интегрировании по части фазового пространства при заданном поле $\eta(\vec{r})$:

$$\Xi\left[\eta(\vec{r})\right] = e^{-\frac{\Omega\left[\eta(\vec{r})\right]}{k_B T}}, \qquad (20.4.3)$$

соответственно, полная большая статистическая сумма может быть найдена как

$$\Xi \equiv e^{-\frac{\Omega}{k_B T}} = \int \prod_{\vec{k}} d\eta'_{\vec{k}} d\eta''_{\vec{k}} \Xi\left[\eta(\vec{r})\right] = \int \prod_{\vec{k}} d\eta'_{\vec{k}} d\eta''_{\vec{k}} e^{-\frac{\Omega\left[\eta(\vec{r})\right]}{k_B T}}. \qquad (20.4.5)$$

Такой интеграл называется функциональным интегралом. Мы видели ранее, что важны длинноволновые флуктуации $\eta(\vec{r})$ (аномальному возрастанию вблизи точки перехода подвержены только флуктуации с малыми волновыми векторами). Именно этими флуктуациями определяется и характер особенностей термодинамических функций. Пусть $\tilde{\eta}(\vec{r}) = \sum\limits_{\vec{k}<\vec{k}_0} \eta_{\vec{k}} e^{i\vec{k}\vec{r}}$, где $k_0 \sim 1/\bar{a}$, $\bar{a}$ – среднее расстояние между частицами (малое для конденсированной фазы). Вместо $\Omega\left[\eta(\vec{r})\right]$ и $\Xi\left[\eta(\vec{r})\right]$ будем тогда интересоваться функционалами $\Omega\left[\tilde{\eta}(\vec{r})\right]$ и $\Xi\left[\tilde{\eta}(\vec{r})\right]$, определенными по (20.4.2) и (20.4.5) с заменой $\prod\limits_{\vec{k}}$ на $\prod\limits_{\vec{k}<\vec{k}_0}$.

Вблизи точки фазового перехода функционал $\Omega\left[\tilde{\eta}(\vec{r})\right]$ может быть разложен по степеням $\tilde{\eta}(\vec{r})$, а поскольку эта функция – медленно меняющаяся, то в разложении можно ограничиться членами наименьшего порядка:

$$\Omega\left[\tilde{\eta}(\vec{r})\right] = \Omega_0 + \int d\vec{r}\left[\alpha t\tilde{\eta}^2 + b\tilde{\eta}^4 + g\left(\nabla\tilde{\eta}\right)^2 - h\tilde{\eta}\right], \quad (20.4.6)$$

где $\Omega_0 \equiv \Omega[\tilde{\eta} = 0]$, αt, b и g – коэффициенты разложения, $t \equiv T - T_c$, h – внешнее поле. Подставляя (20.4.6) в (20.4.5), получаем

$$\Omega = \Omega_0 - k_B T \ln \int \prod_{\vec{k}<\vec{k}_0} d\eta'_{\vec{k}} d\eta''_{\vec{k}} e^{-\frac{\int d\vec{r}\left[\alpha t\tilde{\eta}^2 + b\tilde{\eta}^4 + g(\nabla\tilde{\eta})^2 - h\tilde{\eta}\right]}{k_B T}}. \quad (20.4.7)$$

Величина $H_{eff} \equiv \int d\vec{r}\left[\alpha t\tilde{\eta}^2 + b\tilde{\eta}^4 + g\left(\nabla\tilde{\eta}\right)^2 - h\tilde{\eta}\right]$ называется эффективным гамильтонианом системы.

В области применимости теории Ландау существенны лишь значения $\tilde{\eta}(\vec{r})$ вблизи значения $\bar{\eta}$, минимизирующего $\Omega\left[\tilde{\eta}(\vec{r})\right]$ для фазы. Так как флуктуационные отклонения $\tilde{\eta}(\vec{r})$ тогда малы и $\tilde{\eta}(\vec{r}) \simeq \eta$, можем воспользоваться асимптотическими методами оценки интегралов

$$\int \prod_{\vec{k}<\vec{k}_0} d\eta'_{\vec{k}} d\eta''_{\vec{k}} e^{-\frac{\int d\vec{r}\left[\alpha t\tilde{\eta}^2 + b\tilde{\eta}^4 + g(\nabla\tilde{\eta})^2 - h\tilde{\eta}\right]}{k_B T}} \cong e^{-\frac{\int d\vec{r}\left[\alpha t\eta^2 + b\eta^4 - h\eta\right]}{k_B T}},$$

т.е. мы приходим к функционалу Ω в теории Ландау (соответственно, коэффициенты α, b – такие же, как в теории Ландау).

Ранее мы видели, что в формировании особенностей термодинамических величин и, в частности, величины Ω играют роль длинноволновые флуктуации параметра порядка с волновыми числами $k \sim 1/\xi$, где ξ– корреляционный радиус флуктуаций. Так как при $t \to 0$ радиус $\xi \to \infty$, то наиболее существенны самые маленькие k. Но тогда характер особенностей не должен зависеть от величины $k_0 \sim 1/a$. Можно тогда сказать, что единственным пространственным масштабом, характеризующим эти особенности, является корреляционный радиус ξ, и характер особенностей не должен зависеть от характера межчастичных взаимодействий. Если эти особенности проявляются в появлении в термодинамических величинах членов с нецелыми степенями t (**критическими индексами**, о которых говорилось уже ранее), то сделанное утверждение (**гипотеза масштабной инвариантности**) означает универсальность этих индексов, т.е. независимость их от природы вещества. Так, их значения одинаковы для всех фазовых переходов с изменением симметрии, описывающимся одним параметром порядка.

В заключение заметим, что при $h=0$, $t>0$ (т.е. при $\overline{\eta}=0$) и $b=0$ эффективный гамильтониан сводится к $H_{eff} = V \sum\limits_{\vec{k}<\vec{k}_0} \left(\alpha t + g k^2\right) \left|\eta_{\vec{k}}\right|^2$, т.е распадается на сумму, каждый их которых зависит только от одного из $\eta_{\vec{k}}$. В этом случае интегрирование в (20.4.7) легко провести. При $b>0$ можно строить разложение функционального интеграла в (20.4.7), используя диаграммные методы.